С Б О Р Н И К О Т З А Д А Ч И

П О

ВИСША МАТЕМАТИКА 2

(С РЕШЕНИЯ)

АВТОР:
ДРАГО ЙОРДАНОВ МИХАЛЕВ

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

Пресметнете границите:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{5n-1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+...+n}{n+3}-\dfrac{n}{2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3x^2+x^3}{5x^2-x^3}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{-\sin x+\cos x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin^{-1} x-x^{-2}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$

Да се намерят производните:

18. $y = \sin x - x\cos x$

19. $y = x - \sin x \cos x$

20. $y = \operatorname{tg} x - x$

21. $y = \dfrac{1+x^2}{x} - x$

22. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

23. $y = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$

24. $y = \sqrt{4x-x^2} + 4\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

25. $y = x^2 \sin x^2 + \cos x^2$

26. $y = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right)$

27. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Да се намерят екстремумите за функциите:

28. $y = x^3 - 3x - 1$

29. $y = x^2 + 2x - 5$

30. $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

31. $y = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

32. $y = \dfrac{2x-1}{3x+1}$

33. $y = xe^{-\frac{x}{2}}$

34. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$

35. $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$

Намерете асимптотите за следните криви:

36. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

37. $y = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

38. $y = \dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$

39. $y = \dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$

Да се изследва функцията:

40. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

41. $y = \dfrac{x-4}{x^2-3x+2}$

42. $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$

43. $y = \dfrac{x^2-9}{x+1}$

ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

Да се решат интегралите:

44. $\int \frac{x-2}{x^2}dx$

45. $\int \sqrt{x+1}dx$

46. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

47. $\int \frac{xdx}{1+x^2}$

48. $\int \sin x \cos x dx$

49. $\int \frac{dx}{3+x^2}$

50. $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$

51. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

52. $\int x\cos x dx$

53. $\int \operatorname{arctg} x dx$

54. $\int x\ln x dx$

55. $\int xe^{2x^2}\,dx$

56. $\int \cos^2 x dx$

57. $\int \sin^2 x dx$

58. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

59. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

60. $\int \frac{dx}{\sin x}$

61. $\int \sin^2 x dx$

62. $\int tg^2 x dx$

63. $\int \sin 9x.\cos x dx$

64. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

65. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - tg^2 x}$

66. $\int \sin^{10} x.\cos^3 x dx$

67. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$

68. $\int \frac{x-7}{x^2-5x-6}dx$

69. $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$

70. $\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx$

71. $\int \frac{x^3}{x-2}dx$

72. $\int \frac{2x-7}{x^2+x-2}dx$

73. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$

74. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

75. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

76. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

77. $\int \frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}$

78. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

79. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

81. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$

82. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$

83. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

84. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

Пресметнете определения интеграл:

85. $\int_1^4 \sqrt{x}dx$

86. $\int_1^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$

87. $\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$

88. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$

89. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$

90. $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx$

91. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

92. $\int_1^e \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

93. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}$

94. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

Използвайте интегриране по части, за да пресметнете:

95. $\int_0^{2\pi} x\sin 2xdx$

96. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx$

97. $\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

98. $\int_0^1 \ln(x+1)dx$

99. $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

100. $\int_1^e (1+\ln x)^2 dx$

101. $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$ 98.

102. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xtg^2xdx$

103. $\int_0^{\frac{1}{2}} (\arccos x)^2 dx$

Да се намерят лицата на фигурите заградени от графиката на функцията y, абсцисната ос в дадения интервал:

104. $y = x^2 - 5x + 4$, Ox в [2, 6]

105. $y = \frac{x^2}{2}$, Ox в [1, 3]

106. $y = \ln x$, Ox, $x = e$

107. $y = x^3$, Ox в [0, 8]

108. $y = 3x^2 - 2x - 8$, Ox в [0, 3]

109. $y = 2 - \cos 3x$, Ox в $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

Да се изчисли дължината на дъгата от графиката на функцията:

110. $y = x^{\frac{3}{2}}$ в $[0,4]$

111. $y = \ln \sin x$ в $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

Да се определи повърхнината на ротационното тяло образувано от въртенето на кривата:

112. $x^2 + y^2 = R^2$ около Ox

113. $y = 6\sqrt{x}$ около Ox в $[0,2]$

114. $y = \frac{x^3}{3}$ около Ox в $[-2,2]$

Да се определи обема на ротационното тяло образувано от въртенето на кривата:

115. $x^2 + y^2 = R^2$ около Ox

116. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ около Ox

117. $y = x^3$ около Oy, $y = 1$

118. $y = \sin x$ около Ox в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

119. Да се намери обема на прав кръгов конус с радиус R и височина h.

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Да се решат диференциалните уравнения:
- чрез отделяне на променливите:

120. $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$

121. $y' = 3x^2 y$

122. $y' tgx = y$

123. $x^2 y' = 2y$

- чрез хомогенни уравнения:

124. $(x+y)dx + xdy = 0$

125. $x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

126. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$

127. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

- линейни уравнения

128. $xy' + 2y = x^2$

129. $y'\cos x - y\sin x = 2\sin 2x$

130. $y' - \dfrac{3}{x}y = x$

131. $y' - ytgx = \cos x$

- линейни с постоянни коефициенти:

132. $y'' - 2y' - 2y = 0$

133. $y'' - 6y' + 9y = 0$

134. $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 18x + 11$

135. $y'' + 3y' - 4y = 18e^{2x}$

136 $y'' - y' + y = x^2 + 6$

Решете задачите на Коши

137. $y' = y$ при $y(1)=3e$.

138. $y'' - 5y' + 6y = 4e^x$ при $y(0) = 3$; $y'(0) = 5$.

139. $y'' - 6y' + 5y = (x+1)e^{2x}$ при $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

140. $y'' - 6y' + 10y = 0$ при $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Решете граничните задачи

141. $y'' - 2y' - 2y = 0$ при $y(0) = 1$ и $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

142. $y'' + 4y = x$ при $y(0) = 1$ и $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

РЕДОВЕ

Да се докаже, че редовете са сходящи и да се намери сумата им:

143. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

144. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

145. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

146. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2-9}$.

Да се изследват за сходимост редовете:

147. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$;

148. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$;

149. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$;

150. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

151. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$;

152. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

153. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$;

154. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$;

155. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;

156. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$;

157. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$;

158. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Да се определят областите на сходимост и равномерна сходимост за редовете:

159. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$;

160. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$;

161. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$;

162. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n^2}$.

Да се определят областите на сходимост и абсолютна, равномерна сходимост за степенните редове:

163. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$;

164. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$;

165. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^{2n}}{n}$;

166. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{\sqrt{(3n-2).2^n}}$.

Да се определят областите на сходимост и абсолютна сходимост за степенните редове:

167. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$;

168. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2^n n \ln n}$;

169. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$;

170. $\sum_{n=1}^{\infty} (3n+1)(x-1)^n$;

171. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x+3)^n \frac{n+1}{2n-1}$;

172. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x-5)^n}{(3n+1)^{10}}$.

НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Да се пресметнат несобствените интеграли (или да се установи, че са разходящи):

173. $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$;

174. $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

175. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$;

176. $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4}$;

177. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx$;

178. $\int_{0}^{\infty} x \cos x dx$;

179. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2 + x^4}$;

180. $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{\left(x^2 - 1\right)^{4/5}}$;

181. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

182. $\int_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$;

183. $\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

184. $\int_{0}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\frac{1}{x^2} \frac{dx}{x^3}$.

Да се изследват за сходимост интегралите:

185. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x + 2x^2 + 5x^4}$;

186. $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2 + x\sqrt{x}} dx$;

187. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$;

188. $\int_{0}^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$;

189. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x - \cos x}$;

190. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^4}} dx$.

ПРИМЕРНИ ВАРИАНТИ ЗА ПИСМЕН ИЗПИТ

Вариант 1

1. Пресметнете: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = ?$
2. Изследвайте и постройте графиката на функцията $y = \frac{x}{x^2 - 1}$
3. Пресметнете: $\int \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 2)(x + 1)} dx = ?$
4. Намерете лицето на фигурата между правите x = 0; y = 0; x = 1 и графика на функцията $f(x) = xe^{2x}$
5. Решете диференциалното уравнение: $y' + \frac{1}{x} y = 2e^x$

Вариант 2

1. Пресметнете границата $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^5 + 1000x^2 + 1}{4x^5 - 8x} = ?$
2. Пресметнете производната на $f(x) = 4\sin(x^2) - 5\ln x$
3. Пресметнете интервалите на монотонност и изпъкналост, както и локалните екстремуми за функцията $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$, преди това определете дефиниционната област за f(x).
4. Пресметнете определения интеграл: $\int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{x} + 5x \right) dx = ?$
5. Решете задачата на Коши: $y'' - 5y' + 6y = 4e^x$ при $y(0) = 3; y'(0) = 5$

Вариант 3

1. Пресметнете границата: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right) = ?$
2. Пресметнете производната на функцията: $y = \arcsin \frac{2x^2}{1 + x^2}$ при $|x| < 1$
3. Намерете интервалите на монотонност и локалните екстремуми за функцията $y = (2 - x)(x + 1)^2$
4. Намерете дължината на дъгата за кривата $y^2 = x^3$ между x = 0 и x = 1 при y ≥ 0.
5. Решете диференциалното уравнение: $(1 + y^2)dx + xydx = 0$

Вариант 4

1. Пресметнете границата: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}=?$
2. Намерете асимптотите на кривата: $y=x+2arctgx$
3. Пресметнете интеграла: $\int\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, чрез подходяща смяна
4. Намерете лицето $S=\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx\right|$
5. Решете задачата на Коши:

а) $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$, като $y(0)=\dfrac{1}{2}$ и нека $(|y|<1)$ и $(|x|<1)$

б) $y'=y$ при $y(1)=3e$

Вариант 5

1. Пресметнете: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=?$
2. Намерете асимптотите за кривата: $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$
3. Пресметнете: $\int 3x\ln xdx$
4. Намерете обема на тялото, получено при завъртане около оста Ох на кривата $y^2=(x-1)^3$ при $x\le 2$ и $(y\ge 0)$
5. Решете диференциалното уравнение: $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

Вариант 6

1. Пресметнете: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}=?$
2. Намерете асимптотите за $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$
3. Пресметнете интеграла: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin xdx$

4. Пресметнете: $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$

5. Решете задачата на Коши: $y''-6y'+5y=(x+1)e^{2x}$ при $y(0)=1$, $y'(0)=2$

Вариант 7

1. Пресметнете: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}=?$

2. Изследвайте и постройте графика на $y=\frac{x^2-1}{x+2}$

3. Намерете $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$

4. Намерете лицето $S=\left|\int_0^1 (x^2-x)e^{2x}dx\right|$

5. Решете задачата на Коши: $y''+6y'+10y=0$ при $y(0)=1$ и $y'(0)=2$

Вариант 8

1. Да се изследва за непрекъснатост функцията $y=\frac{1}{(x-1)(x-6)}$ в интервалите:

а) [2, 5];
б) [4, 10];
в) [0, 7]

2. Пресметнете $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=?$

3. Намерете инфлексните точки за: $y=x^4-8x^3+24x^2+1$

4. Решете интеграла $\int \sin\sqrt{x}dx$, след подходяща смяна на променливата

5. Решете граничната задача: $y''-2y'+2y=0$ при $y(0)=1$ и $y\left(\frac{n}{2}\right)=2$

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

Граници:

96. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{5n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(5-\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{3}{5}$.

97. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+...+n}{n+3}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)n}{2(n+3)}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1-n-3)}{2(n+3)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(-2)}{2n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=-1.$$

98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3x^2+x^3}{5x^2-x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(2-3x+x^2\right)}{x\left(5x-x^2\right)}=\dfrac{2}{+0}=+\infty$.

99. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)x}=\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

100.

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}{\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)2}=1.\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)=1.\frac{1}{2}.0=0$$

Използвахме $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right);1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha;\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

$$\lim_{x\to 0}=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{1-x\sin x-\cos^2 x}=$$

101. $$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin x(\sin x-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin x\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+0}+\cos 0}{\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)}=\frac{2}{1-1}=\frac{2}{-0}=-\infty.$$

Използвахме $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и още при $x\to 0$, че $\sin x<x$.

102. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2.1=2\ .$$

103. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\mathrm{tg}^2 x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}(x)[1-\mathrm{tg}\,x]=1.\left(1-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}tgx\right)=1.(1-1)=0.$$

9.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \infty^0 = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{1+\infty}} = e^0 = 1.$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{x.\frac{(2x-1)2}{2(2x-1)}} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}} =$

$= e^1 = e.$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}.\frac{5x}{\sin 5x}.\frac{3}{5} = 1.1.\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$.

13.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]} = \frac{2}{2} = 1.$$

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x) = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0.\infty = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\infty}{\infty} =$ по Лопитал

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0 .$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \sin x}{x^2\sin x} = \dfrac{0}{0} =$ по Лопитал

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x - \cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-1}{0} = \infty .$$

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg3x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\infty}{-\infty} =$ по Лопитал $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1.3}{\cos^2 3x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \dfrac{0}{0} =$

по Лопитал $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos 3x(-\sin 3x)3}{3.2.\cos x(-\sin x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin 6x}{-\sin 2x} = \dfrac{0}{0} =$ по Лопитал

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6}{2}.\frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 3\frac{\cos 3\pi}{\cos\pi} = 3 .$$

<u>Производни:</u>

18. $y' = \cos x - 1.\cos x - x(-\sin x) = x\sin x$.

19. $y' = 1 - (\sin x\cos x)' = 1 - \cos^2 x - (\sin x)(-\sin x) = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x =$
$= 2\sin^2 x$.

20. $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2\, x$.

21. $y' = \left(\dfrac{1+x^2}{x} - x\right)' = \left(\dfrac{1}{x} + x - x\right)' = -x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$.

22. $$y' = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1.\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x.1.(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

23. $$y' = arctg'x + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1.\left(1+x^2\right) - 2x.x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

24. $$y' = \left(\sqrt{4x-x^2}\right)' + 4\left(\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}\right)' = \frac{1.(4-2x)}{2\sqrt{4x-x^2}} + \frac{4.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} =$$

$$= \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} = \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{4-x}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} = \sqrt{\frac{4-x}{x}}.$$

25. $$y' = \left(x^2\sin x^2 + \cos x^2\right)' = 2x\sin x^2 + x^2\cos x^2.2x + 2x.\left(-\sin x^2\right) =$$

$$= 2x^3\cos x^2.$$

26. $$y' = 2x.\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + x^2.\frac{1}{x} = 2(\ln x)x .$$

27. $$y' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2.\frac{1}{2}.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' =$$

$$= \frac{1-x}{1+x}.\frac{1}{2}.\frac{(1-x)-(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{-2x}{(1+x).2.(1-x)} = \frac{x}{x^2-1}.$$

<u>Да се намерят екстремумите на функцията:</u>

28. $y = x^3 - 3x - 1, y' = 3x^2 - 3$ решаваме $y \le 0, y' = 0$ когато $x = -1$ и $x = 1$. Тогава $y'' = 6x$ и при $x = 1$ $y'' = 6 > 0$, а при $x = -1$ $y'' = -6 < 0$. Тогава в точката $x = -1$ имаме максимум, а в точка $x = 1$ имаме минимум. $\min f(x) = f(1) = -3$, а $\max f(x) = f(-1) = 1$.

29. $y = x^2 + 2x + 5, y' = 2x + 2 \Rightarrow y' = 0$, ако $x = -1$, $y'' = 2 \Rightarrow$ в точка $x = -1$ имаме минимум, т.е. $\min f(x) = f(-1) = 4$.

30. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $y' = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x.2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

$y' = 0$, когато $x = -1, x = 1$. Определяме $y' < 0$ при $x < -1$, $y' > 0$ при $x \in [-1,1]$ и $y' < 0$ при $x > 1$. Тогава в т. $x = -1$ имаме минимум, а в т. $x = 1$ имаме максимум. $\max f(x) = f(1) = 1$, а $\min f(x) = f(-1) = -1$.

31. $$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}, y' = \frac{(2x - 3)(x - 1) - (x^2 - 3x + 6)}{(x - 1)^2} =$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y' = 0$ при $x = -1, x = 3$ и при x>3 и x<-1 y' >0, а при $x \in (-1,3) \Rightarrow y' < 0$. Тогава в т. $x = -1$ има максимум, а в т. $x = 3$ има минимум. $l\max f(x) = f(-1) = -5; l\min f(x) = f(3) = 3$.

32. $y = \dfrac{2x - 1}{3x + 1}; y' = \dfrac{2(3x + 1) - 3(2x - 1)}{(3x + 1)^2} = \dfrac{6x + 2 - 6x + 3}{(3x + 1)^2} = \dfrac{5}{(3x + 1)^2} > 0$

$\Rightarrow$ тази функция няма локални екстремуми.

33. $y = xe^{\frac{-x}{2}}; y' = e^{\frac{-x}{2}} - \dfrac{1}{2}xe^{\frac{-x}{2}} = e^{\frac{-x}{2}}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$, тогава $y' = 0$ ако $x = 2$,

$y' < 0$ при $x > 2$ и $y' > 0$ за $x < 2$. Получаваме в т. $x = 2$ има локален максимум: $\max f(x) = f(2) = 2e^{-1}$.

34. $y = x - 2arctgx; y' = 1 - \dfrac{2}{1 + x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $y' = 0$ при $x = -1$ и $x = 1$, при $x < -1$ $y' > 0$, при $x \in (-1,1)$ $y' < 0$, а при $x > 1$ $y' > 0$. Тогава в т. $x = -1$ имаме локален максимум, а в т. $x = 1$ имаме локален минимум.

$\max f(x) = f(-1) = -1 - 2\,\mathrm{arctg}(-1) = -1 - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1,$

$\min f(x) = f(1) = 1 - 2\,\mathrm{arctg}\,1 = 1 - 2.\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}$.

35. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$, $y' = \frac{\frac{1}{x}.x - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$. В т. $x = 1$ имаме $y' = 0$.
При $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$. Тогава в т. $x = 1$ има максимум: $\max y(x) = y(1) = 1$.

<u>Намерете асимптотите за:</u>

36. $y = \frac{x-1}{x+1}$ $\lim\limits_{x \xrightarrow[x<-1]{} -1} y = \frac{-2}{-0} = +\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow[x>-1]{} -1} y = \frac{-2}{+0} = -\infty$

Правата $x = -1$ е вертикална асимптота $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$. Тогава правата $y = 1$ е хоризонтална асимптота..

37. $y = 1 - \frac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$. Тогава $x = 0$ е вертикална асимптота, а $y = 1$ е хоризонтална асимптота.

38. $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x-1}$

а) $\lim\limits_{x \xrightarrow[x>1]{} 1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x-1} = \frac{3}{+0} = +\infty, \lim\limits_{x \xrightarrow[x<1]{} 1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x-1} = \frac{3}{-0} = -\infty$

б)
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{x-1} = \infty; \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)x}\right] = 1; \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2 - 3x + 5}{x-1} - x\right] =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2 - 3x + 5 - x^2 + x}{x-1}\right] = -2$$

Тогава правата $y = x - 2$ е наклонена асимптота при $x \to \pm\infty$. От а) правата $x = 1$ е вертикална асимптота.

39. $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}=\dfrac{-6}{0}=\infty$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+3}{x(x-3)}=1, \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+3-x^2+3x}{x-3}\right)=-3$.

Тогава правата $y=x-3$ е наклонена асимптота, а от а) правата $x=3$ е вертикална асимптота..

<u>Изследвайте функциите:</u>

40. $y=x^3-3x^2+4$

Определяме дефиниционната област $D: x\in(-\infty,+\infty)$. Пресмятаме производната:

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)\Rightarrow y'=0$ за $\bar{x}=0$ и $\tilde{x}=2$. Функцията расте при $y'>0$, когато $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ и намалява при $y'<0$ *за* $x\in(0,2)$.

За изпъкналост имаме:

$y''=(y')'=(3x^2-6x)'=6x-6=6(x-1) \quad\Rightarrow\quad y''=0$ при $x=1-$инфл.точка.

Функцията е изпъкнала при $y''>0$ за $x>1$, а вдлъбната при $y''<0$ за $x<1$.

В точката $x=0$ имаме максимум $y(0)=4$, защото $y''(0)=-6<0$.

В точката $x=2$ имаме минимум $y(2)=2^3-3.2^2+4=0$, защото $y''(2)=6>0$.

Ще пресметнем кога функцията се анулира:

$x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-1$ и $x_{2,3}=2$.

41. $y=\dfrac{x-4}{x^2-3x+2}$

Определяме дефиниционната област $D: x\neq 1,\ x\neq 2$. Пресмятаме производната:

$y'=\dfrac{x^2-3x+2-(x-4)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}=\dfrac{-x^2+8x-10}{(x-1)^2(x-2)^2}\Rightarrow y'=0$ при $x^2-8x+10=0$

$\Rightarrow \alpha_1=4-\sqrt{6};\ \alpha_2=4+\sqrt{6}$. Функцията расте при $y'>0$ за $x\in(\alpha_1,\alpha_2)$, а намалява при $y'<0$ за $x\in(-\infty,\alpha_1)\cup(\alpha_2,+\infty)$.

Пресмятаме $y(x)=0\Rightarrow x-4=0\Rightarrow x=4$ и още $y(0)=\dfrac{-4}{2}=-2$.

Вертикални асимптоти:

$$\lim_{x\to 1, x<1} \frac{x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{-3}{-0(-1)} = \frac{-3}{+0} = -\infty \quad ;$$

$\lim\limits_{x\to 1, x>1} \dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-3}{+0(-1)} = \dfrac{-3}{-0} = +\infty$. Тогава правата $x=1$ е вертикална асимптота. Разглеждаме и границите:

$$\lim_{x\to 2, x<2} \frac{x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{1(-0)} = \frac{-2}{-0} = +\infty \quad ;$$

$\lim\limits_{x\to 2, x>2} \dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-2}{1(+0)} = \dfrac{-2}{+0} = -\infty$. Тогава правата $x=2$ е вертикална асимптота.

Хоризонтални и наклонени асимптоти:

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)} = -0$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)} = +0$, защото степента на числителя е по-ниска от степента на знаменателя. Правата $y=0$ е хоризонтална асимптота и функцията няма наклонени асимптоти.

Пресмятаме стойностите на функцията в т. α_1 и т. α_2:

$$y(\alpha_1) = \frac{+\sqrt{6}}{-12+5\sqrt{6}} = \frac{1}{-2\sqrt{6}+5} \approx 10, \quad y(\alpha_1) = \frac{+\sqrt{6}}{12+5\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}+5} \approx \frac{1}{10}.$$

42. . $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$

Определяме дефиниционната област $D: x \neq -1$. Пресмятаме производната :

$y' = \left(\dfrac{2x+2}{x+1} - \dfrac{4}{x+1}\right)' = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$. Функцията расте навсякъде.

Пресмятаме: $y'' = \left(\dfrac{4}{(x+1)^2}\right)' = \dfrac{-8}{(x+1)^3}$, тогава за изпъкналост имаме:

функцията е изпъкнала за $y'' > 0$ при $x < -1$ и вдлъбната за $y'' < 0$ при $x > -1$.

Вертикална асимптота:

$\lim\limits_{x\to -1, x>-1} \dfrac{2x-2}{x+1} = \dfrac{-4}{+0} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1, x<-1} \dfrac{2x-2}{x+1} = \dfrac{-4}{-0} = +\infty$, тогава правата $x=-1$ е вертикална асимптота.

Хоризонтална и наклонена асимптота:

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x-2}{x+1} = 2$, тогава правата $y=2$ е хоризонтална асимптота.

Пресмятаме $y(0) = -2$ и решаваме $y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x-2=0 \Rightarrow \quad x=1$.

43. $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 1}$

Определяме дефиниционната област $D: x \neq -1$. Пресмятаме производната :

$y' = \dfrac{2x(x+1) - (x^2 - 9)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 9}{(x+1)^2} = 1 + \dfrac{8}{(x+1)^2} > 0$, функцията расте.

<u>Вертикална асимптота.</u>

$\lim\limits_{x \to -1, x < -1} \dfrac{x^2 - 9}{x + 1} = \dfrac{-8}{-0} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1, x > -1} \dfrac{x^2 - 9}{x + 1} = \dfrac{-8}{+0} = -\infty$, тогава правата $x = -1$ е вертикална асимптота.

<u>Наклонени и хоризонтални асимптоти.</u>

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x + 1} = \pm\infty$ $\Rightarrow$ няма хоризонтални асимптоти. За наклонена асимптота:

а./ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 9}{(x+1)x} = 1$ б./ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x + 1} - x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 9 - x^2 - x}{x + 1} = -1$.

Тогава функцията има лява и дясна наклонена асимптота $y = x - 1$.

Пресмятаме $y(0) = -9$ и решаваме $y(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$

ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

44. $\int \frac{x-2}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x^2} = \ln|x| - 2\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{x} + \ln|x| + C$.

45. $\int \sqrt{x+1}dx = \int \sqrt{x+1}d(x+1) = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$.

46. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C.$

47. $.\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

48. $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$.

49. $\int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

50. $\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^2+1)dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$.

51. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arctg}(e^x) + C$.

52. $\int x\cos x dx = \int xd(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

53. $.\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

54. $\int x\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

55. $\int xe^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{2x^2}d2x^2 = \frac{1}{4}e^{2x^2} + C$.

56. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

57. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

58. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$.

59.

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$2\int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} = 2\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} = 2\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1} + C.$$

60. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin x \cos x} = \int \frac{d\left(tg\,\frac{x}{2}\right)}{tg\,\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

61. $\int \sin^5 x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 d(\cos x) = -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$.

62. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C$.

63. $\int \sin 9x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 8x)dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{10}(-\cos 10x) + \frac{1}{8}(-\cos 8x)\right] + C$.

64. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

65. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x(\cos^2 x - 1)} = \int \frac{\cot g^2 x dx}{-\sin^2 x} = \int \cot g^2 x d(\cot gx) =$

$= \frac{\cot g^3 x}{3} + C$.

66. $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx = \int \sin^{10} x(1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$

$= \int (\sin^{10} x - \sin^{12} x) d(\sin x) = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C$.

67. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \cot g^2 x \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot g^2 x d(\cot gx) = \frac{\cot g^3 x}{3} + C$.

68. $\int \frac{x-7}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{x-7}{(x-2)(x-3)} dx = I$

$\frac{x-7}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow (x-7) = (A+B)x - (3A+2B)$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A + B = 1 \\ -3A - 2B = -7 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2A + 2B = 2 \\ -3A - 2B = -7 \end{array} \right.$ събираме ги $\Rightarrow -A = -5$,

т.е. $A = 5 \Rightarrow B = -4$, тогава имаме:

$I = \int \frac{5dx}{x-2} - \int \frac{4dx}{x-3} = 5\ln|x-2| - 4\ln|x-3| + C = \ln \frac{|x-2|^5}{|x-3|^4} + C$.

69. $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = I$

$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2 - 1)$,

нека $x = 1$, тогава $1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$, нека $x = -1 \Rightarrow -1 = -2B$, т.е. $B = \frac{1}{2}$,

нека $x = 0$ тогава $0 = A - B - C$, т.е. $C = A - B = -\frac{1}{4}$. Тогава имаме:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2(x+1)}+C.$$

70. $\int\frac{x^2}{x^2+2x+1}dx=\int\left(1-\frac{2x+1}{x^2+2x+1}\right)dx=x-\int\frac{2x+1}{(x+1)^2}dx=x-I=*$

$\frac{2x+1}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow 2x+1=Bx+(A+B)\Rightarrow B=2$, а $A=-1$,

тогава $*=x-I=x-\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}=x-2\ln|x+1|-(x+1)^{-1}+C$.

71. $\int\frac{x^3}{x-2}dx=\int\frac{x^3-2x^2+2x^2-4x+4x-8+8}{x-2}dx=$

$=\int(x^2+2x+4)dx+\int\frac{8}{x-2}dx=\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|+C.$

72. $\int\frac{2x-7}{x^2+x-2}dx=\int\frac{2x+1-8}{x^2+x-2}dx=\int\frac{[(x^2+x-2)-8]}{x^2+x-2}dx=$

$=\ln|x^2+x-2|+\int\frac{-8dx}{(x+2)(x-1)}=\ln|x^2+x-2|+I$

$\frac{-8}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow -8=(A+B)x+(2B-A)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}A+B=0\\2B-A=-8\end{array}\right.\Rightarrow B=-A$

, тогава $3B=-8$, т.е. $B=-\frac{8}{3}, A=\frac{8}{3}$.

$$I=\int\frac{\frac{8}{3}}{x+2}dx-\int\frac{\frac{8}{3}}{x-1}dx=\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|^{\frac{8}{3}}+C\Rightarrow\int\frac{2x-7}{x^2+x-2}dx=\ln\frac{|x+2|^{\frac{11}{3}}}{|x-1|^{\frac{5}{3}}}+C.$$

73. $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2}dx=\int\frac{x+2}{x^2(x-2)}dx=I$

$$\frac{x+2}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{K}{x-2}\Rightarrow x+2=A(x-2)+B\left(x^2-2x\right)+Kx^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}B+K=0\\ A-2B=1\\ -2A=2\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}K=1\\ B=-1\\ A=-1\end{array}\right.$$

$$I=-\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+\frac{1}{x}+C.$$

74. $\displaystyle\int\frac{2x^2-5x+1}{x(x-1)^2}dx=I$

$$\frac{2x^2-5x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{K}{(x-1)^2}\Rightarrow 2x^2-5x+1=$$

$$=A(x-1)^2+B\left(x^2-x\right)+Kx\Rightarrow\left|\begin{array}{l}A+B=2\\ K-2A-B=-5\\ A=1\end{array}\right.\Rightarrow B=1, K-3=-5$$

т.е. $K=-2$. Тогава имаме:

$$I=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\ln\left|x^2-x\right|+2(x-1)^{-1}+C.$$

75. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}=I$, правим смяната $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$,

тогава $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}; x=\operatorname{arctg}t; \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, т.е.

$$I=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

76. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}=I$, правим смяната $\operatorname{tg}x=t\Rightarrow x=\operatorname{arctg}t, dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$, но

$1+tg^2x=\dfrac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\dfrac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2}$, т.е.

$$I=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{3}{1+t^2}}dt=\int\frac{1}{t^2+4}dt=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C.$$

77. $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}=\int\frac{\sin xdx}{2\sin^2 x(1+\cos x)}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}=I$,

полагаме $\cos x=t\Rightarrow I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2-1)(t+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)^2}$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)}=\frac{A}{(t-1)}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{K}{(t+1)}\Rightarrow 1=A(t+1)^2+B(t-1)+K(t^2-1),$$

при $t=1\Rightarrow 4A=1$, т.е. $A=\dfrac{1}{4}$; при $t=-1\Rightarrow 1=-2B$, т.е. $B=-\dfrac{1}{2}$;

при $t=0\Rightarrow 1=A-B-K\Rightarrow 1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-K\Rightarrow K=\dfrac{3}{4}-1=-\dfrac{1}{4}$

$$2I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\left(-\frac{1}{4}\right)\int\frac{dt}{t+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{dt}{(t+1)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}(t+1)^{-1}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

78. $\displaystyle\int\frac{dx}{5+\cos x}=I$, полагаме $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t\Rightarrow I=\displaystyle\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2dt}{8+2t^2}=$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}\right)+C.$$

79. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx=I$, полагаме $x^{\frac{1}{6}}=t$, тогава $\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}dx=dt$, т.е.

$\dfrac{1}{6}t^{-5}dx=dt$, т.е. $6t^5dt=dx\Rightarrow I=\displaystyle\int\frac{t^3-1}{t^2+1}6t^5dt=6\int\frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt=\ldots$

довършете докрай след деление.

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = I$, полагаме $\sqrt[6]{x} = t, dx = 6t^5 dt \Rightarrow$

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6\int \left(t^2 - t + 1\right)dt - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C .$$

81. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = I$, полагаме $\sqrt{x} = t, dx = 2tdt \Rightarrow$

$$I = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2\int 1dt + 2\int \frac{-1dt}{t^2+1} = 2t - 2\,\mathrm{arctg}\, t + C = 2\sqrt{x} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C .$$

82. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx = I$, полагаме $t = \sqrt{x}, dx = 2tdt \Rightarrow$

$$I = 2\int \frac{(1+t)tdt}{1-t} = 2\int \frac{t^2 - t + 2t - 2 + 2}{1-t} dt = -2\int (t+2)dt + 4\int \frac{dt}{1-t} =$$

$$= \frac{-2t^2}{2} - 4t - 4\ln|1-t| + C = -x - 4\sqrt{x} - 4\ln\left|1-\sqrt{x}\right| + C .$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{(1-t)tdt}{1+t} = 2\int \frac{-t^2 - t + 2t + 2 - 2}{1+t} dt =$$

83. $= 2\int (-t+2)dt - 4\int \frac{dt}{1+t} = -t^2 + 4t - 4\ln|1+t| + C =$

$$= -x^2 + 4\sqrt{x} - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C .$$

84. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = I$, полагаме $\sqrt{x} = t, dx = 2tdt \Rightarrow$

$$I = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C .$$

Определен интеграл:

85. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$.

86. $\int\limits_1^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \left.\left(x + 4e^{\frac{x}{4}}\right)\right|_1^4 = 4 + 4e - 1 - 4e^{\frac{1}{4}} = 3 + 4e - 4e^{\frac{1}{4}}$.

87. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{3x-2} = 3\int\limits_1^5 \frac{d(3x-2)}{3x-2} = 3\ln(3x-2)\Big|_1^5 = 3\ln\frac{13}{1} = 3\ln 13$.

88. $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx = 3\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}d\left(\frac{x}{3}\right) = \left.3e^{\frac{x}{3}}\right|_0^3 = 3(e-1)$.

89. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \left.\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\pi+2}{8}$.

90. $\int\limits_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} + 3\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big|_0^2 + \left.\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right|_0^2 =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right) + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\,1 - \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\,0 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{8}$.

91. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

92. $\int\limits_1^e \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int\limits_1^e \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = \mathrm{arctg}(e^x)\Big|_1^e = \mathrm{arctg}(e^e) - \mathrm{arctg}(e)$.

93. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+4)} = I$ имаме:

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} \Rightarrow 1 = A(x+4) + B(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ 4A + B = 1 \Rightarrow 4A - A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$I=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{dx}{x+1}+\int_1^2\frac{(-1)dx}{x+4}=\ln\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x+4}\Bigg|_1^2=\ln\frac{3^{\frac{1}{3}}}{6}-\ln\frac{2^{\frac{1}{3}}}{5}=\ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\frac{5}{6}\right]=$$

$$=\ln\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}.\frac{5}{6}\right).$$

94. $$\int_1^e\frac{\sin(\ln x)dx}{x}=\int_{1=x}^{e=x}\sin(\ln x)d(\ln x)=-\cos(\ln x)\Big|_{x=1}^{e}=-\cos 1+\cos 0=$$

$$=1-\cos 1.$$

95. $$\int_0^{2\pi}x\sin 2xdx=\frac{-1}{2}\int_0^{2\pi}xd(\cos 2x)=\frac{-1}{2}\left[x\cos x\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos 2xdx\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[2\pi-0-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2xd2x\right]=-\pi+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi}=-\pi.$$

96. $$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx=x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{6}-0+\frac{1}{2}\int_{0=x}^{\frac{1}{2}=x}\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}.\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right).$$

97. $$\int_0^1(x-1)e^{-x}dx=e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1xe^{-x}dx=e^{-1}-1-\int_0^1xd\left(e^{-x}\right)=$$

$$=e^{-1}-1+\int_0^1e^{-x}dx-xe^{-x}\Big|_0^1=e^{-1}-1-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=-1-e^{-1}+1=-e^{-1}.$$

98. $$\int_0^1\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\ln 2-0-x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{-dx}{x+1}=$$

$$=\ln 2-1+\ln(x+1)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

99. $\int_1^e (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e x.2\ln x.\frac{1}{x}dx = e - 0 - 2\int_1^e \ln x dx =$

$= e - 2x.\ln x\Big|_1^e + 2\int_1^e x.\frac{1}{x}dx = e - 2e + 2x\Big|_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2$.

100. $\int_1^e (1-\ln x)^2 dx = (e-1) + 2\int_1^e \ln x dx + \int_1^e (\ln x)^2 dx$ от предната задача:

$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2, \int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}dx = e - (e-1) = 1$. Тогава

$\int_1^e (1-\ln x)^2 dx = (e-1) + 2 + e - 2 = 2e - 1$.

101. $\int_0^1 x^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 de^{2x} = \frac{x^2 e^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}.2xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 xde^{2x} =$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{x}{2}.e^{2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{4}$.

102. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = I$, защото

$/\,\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,/$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\mathrm{tg}\,x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\mathrm{tg}\,x) - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi^2}{32} + x\,\mathrm{tg}\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,xdx =$

$= -\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - 0 + \ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi - \pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = \frac{8\pi - \pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln 2$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\arccos x)^2\, dx = x(\arccos x)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} xd\left(\arccos^2 x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 0 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x.2\arccos x}{-\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi^2}{18} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos x}{-\sqrt{1-x^2}}\,d\left(1-x^2\right) =$$

103. $$= \frac{\pi^2}{18} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x d\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\pi^2}{18} - 2(\arccos x)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{18} - 2.\frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} + 2.1 - 2.x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{18} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1.$$

104. $$S = \int_2^6 \left(x^2 - 5x + 4\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^6 = (72 - 80 + 24) - \left(\frac{8}{3} - 10 + 8\right) =$$

$$= 16 + 2 - \frac{8}{3} = 15\frac{1}{3} = \frac{46}{3}.$$

105. $$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Bigg|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

106. $$S = \int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}\,dx = e - 0 - x\Big|_1^e = 1.$$

107. $$S = \int_0^8 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^8 = \frac{8^4}{4} - 0 = 1024.$$

108. $$S = \left|\int_0^3 \left(3x^2 - 2x - 8\right)dx\right| = \left|\left(x^3 - x^2 - 8x\right)\Big|_0^3\right| = |27 - 9 - 24| = 6.$$

109. $$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (2 - \cos 3x)dx = \left(2x - \frac{1}{3}\sin x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\sin\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

<u>Дължина на дъга:</u>

110. $$l=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}.\left.\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^4=\frac{8}{27}\left.\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^4=$$

$$=\frac{8}{27}\left[10^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{8}{27}\left(\sqrt{1000}-1\right).$$

$$l=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{1+\left[\ln(\sin x)\right]^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{1+\cot g^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{|\sin x|}=$$

111. $$=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{tg\frac{x}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,d\left(\frac{x}{2}\right)=2\int_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\frac{\pi}{2}}d\left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\right)=$$

$$=2\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\frac{\pi}{2}}=2\ln tg\frac{\pi}{4}-2\ln tg\frac{\pi}{6}=2\left(\ln 1-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\ln\sqrt{3}=\ln 3\,.$$

<u>Повърхнина на ротационно тяло:</u>

$$S_T=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$$

112. $y^2=R^2-x^2\Rightarrow y=\sqrt{R^2-x^2}$ при $x\in\left[-R,R\right]$

$$S_T=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{\sqrt{R^2-x^2+x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=2\pi R\int_{-R}^{R}dx=2\pi Rx\big|_{-R}^{R}=2\pi R\left[R-\left(-R\right)\right]=4\pi R^2\,.$$

113.

$$S_T = 2\pi\int_0^2 6\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2}dx = 12\pi\int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{\frac{x+9}{x}}dx = 12\pi\int_{x=0}^{x=2}\sqrt{x+9}\,d(x+9) =$$

$$= 12\pi\frac{(x+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 8\pi\left[11^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = 8\pi\left(11^{\frac{3}{2}} - 27\right).$$

114.

$$S_T = 2\pi\int_{-2}^{2}\left|\frac{x^3}{3}\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}\right|dx = \frac{2\pi}{3}\int_{-2}^{2}\left|x^3\sqrt{1+x^4}\right|dx = \left|\frac{\pi}{6}\int_{x=-2}^{x=2}\sqrt{1+x^4}\,d\left(1+x^4\right)\right| =$$

$$= \frac{2\pi}{6}\frac{\left(1+x^4\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{2\pi}{9}\left[(1+16)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2\pi}{9}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

<u>Обем на ротационно тяло:</u>

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

115. $V = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$

116. $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ и $x \in [-a, a]$

$$V = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = 2\pi b^2\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = 2\pi b^2\,\frac{2a}{3} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

117. $y = x^3$ около O_y $y = 1$ (тук *x* е функцията, а *y* аргумента), тогава

$V = \pi\int_a^b x^2 dy$, в случая имаме: $x = y^{\frac{1}{3}}$ и $y \in [0,1]$

$$V=\pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}dy=3\pi\left.\frac{y^{\frac{5}{3}}}{5}\right|_0^1=\frac{3\pi}{5}-0=\frac{3\pi}{5}.$$

118. $$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left.\frac{\pi}{2}x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{\pi}{4}\sin 2x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

119. Функцията може да се изрази като $y=\frac{r}{h}x \qquad x\in[0,h]$

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\left.\frac{\pi r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ:

120. $y' = \dfrac{y+1}{x-1} \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y+1} = \int \dfrac{dx}{x-1} + C_1$ $\qquad \ln\left|\dfrac{y+1}{x-1}\right| = \ln C$

(полагаме $C_1 = \ln C$ при $C > 0$) $\Rightarrow y+1 = C(x-1) \Rightarrow y = C(x-1)-1$.

121. $y' = 3x^2 y \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int 3x^2 dx + \ln C, C > 0 \quad \ln y = x^3 + \ln C \Rightarrow y = Ce^{x^3}$.

122. $y'tgx = y \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{dx}{tgx} + \ln C \underset{C>0}{\Rightarrow} \ln y = \ln(\sin x) + \ln C \Rightarrow y = C \sin x$.

123. $x^2 y' = 2y \Rightarrow \int \dfrac{dy}{2y} = \int \dfrac{dx}{x^2} + \ln \overline{C}, \quad \overline{C} > 0 \quad \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} \ln y = -x^{-1} + \ln \overline{C} \Rightarrow C = \overline{C}^2 \qquad \ln y = -2x^{-1} + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\frac{2}{x}}$.

124. $(x+y)dx + xdy = 0$, полагаме $\dfrac{y}{x} = z \Rightarrow xdz + zdx = dy$

$(x - zx)dx + x^2 dz + xzdx = 0$

$xdx + x^2 dz = 0 \Rightarrow \int \dfrac{-dx}{x} = \int dz - \ln C, C > 0$

$z = -\ln x + \ln C$

$z = \ln \dfrac{C}{x} \Rightarrow y = x \ln \dfrac{C}{x}$.

125. $x^2 + y^2 - 2xy \dfrac{dy}{dx} = 0$, полагаме $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow dy = xdz + zdx$

$(1+z^2)dx - 2z(xdz + zdx) = 0$

$(1-z^2)dx - 2zxdz = 0$

$\ln C + \int \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{2z}{1-z^2} dz, C > 0$

$\ln C + \ln x = \ln(1-z^2)^{-1} \Rightarrow (1-z^2)^{-1} = xC$

$1 - z^2 = \dfrac{1}{xC} \Rightarrow z^2 = 1 - \dfrac{1}{xC} \Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - \dfrac{1}{xC}}, y = \pm x\sqrt{1 - \dfrac{1}{xC}}$.

126. $y' = \frac{y}{x} - 1, \frac{y}{x} = z$

$xz' + z = z - 1 \Rightarrow xz' = -1 \Rightarrow \int dz = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$ ако

$C > 0 \Rightarrow z = -\ln x + \ln C \Rightarrow z = \ln\frac{C}{x} \Rightarrow y = x\ln\frac{C}{x}$.

127. $y' = \frac{x+y}{x}; z = \frac{y}{x}$

$xz' + z = 1 + z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow z = \ln(xC) \Rightarrow y = x\ln(xC), \quad (C > 0).$

128. $xy' + 2y = x^2 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = x$

$$y = e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(C + \int xe^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right) = e^{-2\ln x}\left(C + \int x.x^2dx\right) = x^{-2}\left(C + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{4}.$$

129. $y'\cos x - y\sin x = 2\sin 2x \underset{\sin 2x = 2\sin x\cos x}{\Rightarrow} y' - tgxy = 4\sin x$

$$y = e^{\int tgxdx}\left(C + \int 4\sin xe^{-\int tgxdx}dx\right) = e^{-\ln|\cos x|}\left(C + \int 4\sin x\cos xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left[C + \int \sin 2xd(2x)\right] = \frac{1}{\cos x}(C - \cos 2x).$$

130. $y' - \frac{3}{x}y = x \Rightarrow y = e^{3\ln x}\left(C + \int xe^{-3\ln x}dx\right) = x^3\left(C + \int x^{-2}dx\right) = x^3\left(C - \frac{1}{x}\right).$

131. $y' - ytgx = \cos x$

$$y = e^{\int tgxdx}\left(C + \int \cos xe^{-\int tgxdx}dx\right) = \frac{1}{\cos x}\left(C + \int \cos x\frac{1}{\cos x}dx\right) = \frac{C + x}{\cos x}.$$

132. $y'' - 2y' - 2y = 0$

характеристичното уравнение е: $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$y = C_1e^{(1+\sqrt{3})x} + C_2e^{(1-\sqrt{3})x}$.

133. $y'' - 6y' + 9y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \Rightarrow y = (C_1 x + C_2)e^{3x}$.

134. $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 18x + 11$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1;3 \Rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

търсим: $\overline{y} = (ax^2 + bx + c) \Rightarrow \overline{y}' = 2ax + b \Rightarrow \overline{y}'' = 2a$, понеже $0 \neq 1; 0 \neq 3$,

тогава: $2a - 4(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 3x^2 - 18x + 11$,

получаваме след приравняване на коефициенти:

$$\left|\begin{array}{l} 3a = 3 \\ 3b - 8a = -18 \\ 3c - 4b + 2a = 11 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a = 1 \\ 3b = -10 \Rightarrow b = -\dfrac{10}{3} \\ 3c = 9 + 4b \Rightarrow c = 3 - \dfrac{40}{9} = -\dfrac{13}{9} \end{array}\right.$$

,тогава: $\overline{y} = x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{13}{9}$ или $y = y_0 + \overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{13}{9}$.

135. $y'' + 3y' - 4y = 18e^{2x}$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$

$y_0 = C_2 e^x + C_1 e^{-4x}$

$\overline{y} = Ke^{2x}; \overline{y}' = 2Ke^{2x}; \overline{y}'' = 4Ke^{2x}$

$4Ke^{2x} + 6Ke^{2x} - 4Ke^{2x} = 18e^{2x} \Rightarrow 6K = 18 \Rightarrow K = 3$

$\overline{y} = 3e^{2x}$, тогава $y = y_0 + \overline{y} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x + 3e^{2x}$.

136. $y'' - y' + y = x^2 + 6$

$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$y = y_0 + \overline{y}$, определяме $y_0 = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$\overline{y} = (ax^2 + bx + c), \overline{y}' = 2ax + b, \overline{y}'' = 2a$, след заместване определяме a, b и c $(ax^2 + bx + c) - 2ax - b + 2a = x^2 + 6 \quad \Rightarrow \quad a = 2, b - 2a = 0, c - b + 2a = 6,$ тогава

$a=2, b=4, c=6.$ Определяме $\overline{y}=2x^2+4x+6$ и получаваме окончателно $y=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+2x^2+4x+6.$

137. $y'=y$ при $y(1)=3e$.

$\frac{dy}{dx}=y\Rightarrow\frac{dy}{y}=dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=x+\ln C_1 \quad ,C_1>0\Rightarrow\ln\frac{y}{C_1}=x\Rightarrow y=e^xC_1.$

От условието $y(1)=3e$ имаме $C_1e^1=3e\Rightarrow C_1=3$, тогава $y=3e^x$.

138. $y''-5y'+6y=4e^x \quad , y(0)=3$ и $y'(0)=5.$

$\lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=2{,}3.$ Тогава имаме $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. Търсим частното решение от вида $\overline{y}=ke^x$, понеже $1\neq 2, 1\neq 3$, тогава $\overline{y}'=\overline{y}''=ke^x$. Заместваме в уравнението и получаваме: $ke^x-5ke^x+6ke^x=4e^x\Rightarrow 2k=4\Rightarrow k=2\Rightarrow\overline{y}=2e^x$.

Решението на уравнението е $y=y_0+\overline{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+2e^x$. Заместваме с условията след изчисляване на производната $y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+2e^x$, тогава

$:\left|\begin{array}{l} y(0)=C_1+C_2+2=3 \\ y'(0)=2C_1+3C_2+2=5 \end{array}\right.$.Решаваме системата и получаваме $C_1=0\,, C_2=1$.

Окончателно имаме $y=e^{3x}+2e^x$.

139. $y''-6y'+5y=(x+1)e^x \quad , y(0)=1$ и $y'(0)=2.$

Решаваме характеристичното уравнение : $\lambda^2-6\lambda+5=0\Rightarrow\lambda_1=1, \lambda_2=5.$

Тогава имаме $y_0=C_1e^x+C_2e^{5x}$. Търсим частното решение от вида $\overline{y}=x(ax+b)e^x$, понеже 1 е корен на характеристичното уравнение, тогава :

$\overline{y}'=\left(ax^2+(2a+b)x+b\right)e^x \quad ; \quad \overline{y}''=\left(\overline{y}'\right)'=\left(ax^2+(4a+b)x+2a+2b\right)e^x$.

Заместваме уравнението и получаваме след съкращаване на e^x :

$5\left(ax^2+bx\right)-6\left(ax^2+(2a+b)x+b\right)+\left(ax^2+(4a+b)x+2a+2b\right)=(x+1)$

След приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на $x \quad \Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} -8a \quad =1 \qquad \Rightarrow \qquad a=-\frac{1}{8} \\ 2a-4b \ =1\Rightarrow b=\frac{(2a-1)}{4}\Rightarrow b=\frac{-5}{16}. \end{array}\right.$$

Тогава имаме : $\overline{y} = x\left(-\frac{x}{8} - \frac{5}{16}\right)e^x \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \frac{x(2x+5)}{16}e^x$, тогава

$y' = \left(C_1 - \frac{(2x^2 + 9x + 5)}{16}\right)e^x + 5C_2 e^{5x}$. Заместваме в началните условия :

$$\left| \begin{array}{ll} y(0) = C_1 + C_2 = 1 & \Rightarrow \quad C_1 = 1 - C_2 \\ y'(0) = C_1 - \frac{5}{16} + 5C_2 = 2 & \Rightarrow C_2 = \frac{21}{64} \Rightarrow C_1 = \frac{43}{64}. \end{array} \right.$$

Окончателно след заместване с получените стойности на C_1 и C_2 имаме:

$$y = \left(\frac{-8x^2 - 20x + 43}{64}\right)e^x + \frac{21}{64}e^x.$$

140. $\quad y'' + 6y' + 10y = 0 \quad , y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$.

Решаваме характеристичното уравнение :

$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3 - i,\ \lambda_2 = -3 + i$,. тогава

$y_0 = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \Rightarrow y_0' = -3e^{-3x}[(C_2 - 3C_1)\cos x - (3C_2 + C_1)\sin x]$

използваме началните условия и получаваме

$y(0) = C_1 = 1$, $y'(0) = C_2 - 3C_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 5$. Окончателно имаме:

$y = y_0 = e^{-3x}(\cos x + 5\sin x)$.

141. $\quad y'' - 2y' + 2y = 0 \quad , y(0) = 1$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решаваме характеристичното уравнение :

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 - i,\ \lambda_2 = 1 + i$,. тогава

$y_0 = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.Използваме граничните условия и получаваме

$y(0) = C_1 = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 e^{\frac{\pi}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2e^{\frac{-\pi}{2}}$.

Окончателно имаме: $y = y_0 = e^x\left(\cos x + 2e^{\frac{-\pi}{2}} \sin x\right)$.

142. $\quad y'' + 4y = x \quad , y(0) = 1$ и $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Решаваме характеристичното уравнение :

$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2i,\ \lambda_2 = 2i$, тогава

$y_0 = \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$. Търсим частното решение от вида: $\overline{y} = \left(ax + b\right)$, тогава $\overline{y}' = a$ и $\overline{y}'' = 0$. Заместваме в уравнението и получаваме:

$4\left(ax + b\right) = x \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{4}; \quad b = 0$. Тогава имаме $\overline{y} = \dfrac{x}{4}$ и тогава

$$y = \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + \frac{x}{4}.$$

Използваме граничните условия и получаваме

$$y(0) = C_1 = 1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = (C_2 \sin\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{3\pi}{8}.$$

Окончателно имаме: $y = \left(\cos 2x + \left(\dfrac{3\pi}{8}\right)\sin 2x + \dfrac{x}{4}\right)$.

РЕДОВЕ

143. Използваме, че $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогава $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=$

$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+...\right]=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)=1.$

144. Използваме, че $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, тогава

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$. От предната задача първата сума е 1, а втората е същата като започва от втория й член обаче и сумата й е $\frac{1}{2}$. Тогава получаваме $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$.

145. Използваме, че $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$,а $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)+...\right]=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}.$

146. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{4n^2-9}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n-3)}-\frac{1}{2n+3}\right]=\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{3}.\frac{23}{15}=\frac{23}{45}.$

Използвахме, че:

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-3}=\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right]+\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2n-3}=\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k+3}$.

147. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$. Използваме принципа за сравняване на редове и понеже степента на знаменателя е с 1 по-голяма от тази на числителя, то редът се държи като хармоничния ред, т.е. е разходящ.

148. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. Използваме принципа за сравняване на редове и понеже степента на знаменателя е с 2 по-голяма от тази на числителя, то редът е сходящ.

149. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3-1}$. Използваме принципа за сравняване на редове и понеже степента на знаменателя е с 2 по-голяма от тази на числителя, то редът е сходящ

150. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$. Използваме принципа за сравняване на редове и понеже степента на знаменателя е с 3/2 (3/2>1) по-голяма от тази на числителя, то редът е сходящ

151. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$. Използваме критерия на Коши, т.е. разглеждаме границата:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+5}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{n^2+5}=\frac{1}{2}<1$. Тогава редът е сходящ. Използвахме, че $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P_k(n)}=1$, където $P_k(n)$ е полином от степен *n*.

152. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. Ще използваме критерия на Даламбер, т.е. ще разгледаме:

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1$. Тогава редът е разходящ.

153. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$. По критерия на Коши имаме: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^5}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\sqrt[n]{n^5}=\frac{1}{5}<1$. Редът е сходящ.

154. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$. Ще използваме критерия на Даламбер, т.е. ще разгледаме:

$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n+3}}{(n+1)!}:\frac{e^{2n+1}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n+1}=0<1$. Тогава редът е сходящ.

155. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. По критерия на Коши имаме: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt[n]{n^2}=\frac{1}{3}<1$. Редът е сходящ.

156. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$. Необходимото условие за сходимост е общият член да клони към нула при $n\to\infty$. Имаме $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$. Редът е разходящ.

157. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. Ще използваме интегралния критерий :

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_2^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}$. Интегралът и редът са сходящи.

158. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\frac{1}{2}} n}$. Ще използваме интегралния критерий :

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\frac{1}{2}} x}=\int_2^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln^{\frac{1}{2}} x}=\frac{\ln^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}}\Big|_2^{\infty}=\infty-2\ln^{\frac{1}{2}}2=\infty$. Интегралът и редът са едновременно разходящи.

159. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$. За всяко x е в сила: $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ е сходящ, тогава по критерия на Вайерщрас е сходящ и то абсолютно редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

160. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$. Разглеждаме : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^x.\sqrt[n]{n^{-2}}=e^x<1$. Последното неравенство се постига при $x<0$ и това е областта на абсолютна сходимост , остава да разгледаме за $x=0$, но редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ е сходящ . Областта на сходимост тогава е $x\le 0$.

161. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. С алтернативно сменящи се знаци е и $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x+n}\right|=0$. Редът тогава е сходящ навсякъде. За абсолютна сходимост имаме: $\forall x\quad\exists N$, такова че $x+N<2N\quad\Rightarrow\frac{1}{2N}<\frac{1}{x+N}$, но редът $\sum_{N=]x+1[}^{\infty}\frac{1}{2N}$ е разходящ, тогава и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$ е разходящ. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ никъде не е абсолютно сходящ , а е сходящ навсякъде.

162. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n^2}$. По Коши имаме $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|\,(-1)^n(x-1)^n\,|}{n^2}}=|x-1|<1\quad\Leftrightarrow 0<x<2$ и редът е сходящ абсолютно. За $x=0$ и $x=2$ получаваме съответно редовете

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, които са сходящи. Следователно областта на сходимост за реда е $x\in[0,2]$.

163. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$. По Коши имаме :

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|\ (x-1)^n\ |}{n^2 2^n}}=\frac{1}{2}|x-1|<1 \quad \Leftrightarrow |x-1|<2 \Rightarrow -2<x<2 \ \Rightarrow \quad -1<x<3$. За x=1 и x=3 се проверява, че редовете са сходящи. Следователно областта на сходимост за реда е $x\in[-1,3]$.

164. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{1}{2}}3^{n-1}}$. По Коши имаме : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|\ x^n\ |}{n^{\frac{1}{2}}3^{n-1}}}=\frac{1}{3}|x|<1 \quad \Leftrightarrow |x|<3 \Rightarrow -3<x<3$.

Това е областта на абсолютна сходимост. За x=-3 се проверява, че редът $3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ е сходящ, защото е с алтернативно сменящи се знаци. За x=3 имаме реда $3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, който е разходящ. Следователно областта на сходимост за реда е $x\in[-3,3)$.

165. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^{2n}}{n}$. Имаме

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n(x+2)^{2n}}{n}\right|}=(x+2)^2<1 \quad \Rightarrow -1<x+2<1 \Rightarrow -3<x<-1$. Това е областта на абсолютна сходимост. За $x=-3$ и $x=-1$ получаваме един и същи ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, който е с алтернативно сменящи се знаци и е сходящ. Тогава областта на сходимост е $x\in[-3,-1]$.

166. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^n}{(3n-2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2^n}}$. Имаме

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n(x+1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}\right|}=|\ x+1\ |\frac{3}{\sqrt{2}}<1 \Rightarrow |x+1|<\frac{\sqrt{2}}{3} \ \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{3}-1<x+1<\frac{\sqrt{2}}{3}-1.$

Това е областта на абсолютна сходимост. За $x=-\frac{\sqrt{2}}{3}-1$ получаваме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n 3^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(3n-2)}}$$, който е с алтернативно сменящи се знаци и е

сходящ. За $x=\frac{\sqrt{2}}{3}-1$ получаваме реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n 3^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n-2)}}$, който е разходящ, защото степента в знаменателя е $\frac{1}{2}$. Тогава областта на сходимост е

$-\frac{\sqrt{2}}{3}-1\le x<\frac{\sqrt{2}}{3}-1.$

167. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$

Имаме: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n\frac{(n+1)^n}{n^n}}=|x|<1.$

За $x=\pm1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, които са разходящи, защото общият член не клони към нула. Окончателно областта на сходимост е $|x|<1$.

168. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{2^n n\ln n}.$

По критерия на Коши имаме: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{2^n n\ln n}}=\frac{|x|}{2}<1\Rightarrow -2<x<2.$

За $x=-2\Rightarrow\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, който е разходящ. За $x=2\Rightarrow\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$, който е сходящ, защото е с алтернативно сменящи се знаци. Областта на сходимост е $-2<x\le 2$.

169. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}.$

С критерия на Коши получаваме $\dfrac{|x-3|}{4}<1 \Rightarrow -1<x<7.$

За $x=-1 \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{2n+1}$, който е разходящ.

За $x=7 \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, който е сходящ.

Окончателно областта на сходимост е $-1<x\leq 7.$

170. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n+1)(x-1)^n.$

По критерия на Коши имаме $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3n+1)|x-1|^n} = |x-1|<1 \quad \Rightarrow 0<x<2.$

За $x=0$ и $x=2$ имаме редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n (3n+1)$, които са разходящи.

171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x+3)^n \dfrac{n+1}{2n-1}.$

По критерия на Коши имаме:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n (x+3)^n \dfrac{n+1}{2n-1}\right|} = |x+3|<1 \quad \Rightarrow -1<x+3<1 \quad \Rightarrow -4<x<-2.$

За $x=-4$ и $x=-2$ получаваме редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{2n-1}$, те са разходящи.

Окончателно областта на сходимост е $x\in(-4,-2).$

172. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n (x-5)^n}{(3n+1)^{10}}.$

По критерия на Коши имаме:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{n^n (x-5)^n}{(3n+1)^{10}}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} n|x-5| = \infty$ при $x\neq 5.$ Единствената точка на сходимост е когато $x=5$, но тогава редът се изражда.

НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

173. $$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\int_e^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\left.\frac{-\ln^{-2}x}{2}\right|_e^{\infty}=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2\ln^2 x}+\frac{1}{2\ln^2 e}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

174. $$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\frac{1}{2}}x}=\int_e^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^{\frac{1}{2}}x}=\left.\frac{2\ln^{1/2}x}{1}\right|_e^{\infty}=2\lim_{x\to\infty}\ln^{1/2}x-2\ln^{1/2}e=2\infty-2=\infty.$$

Несобственият интеграл е разходящ.

175. $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+6x+11}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2}+\int_{0}^{\infty}\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{0}\frac{d\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{d\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left.\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right|_{-\infty}^{0}+\operatorname{arctg}\left.\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right|_{0}^{\infty}\right)=$$

$$=(\operatorname{arctg}\infty-\operatorname{arctg}(-\infty))\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

176. $$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}=\left.\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right|_0^{\infty}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+4\right)-\ln 4\right)=\infty.$$

Интегралът е разходящ.

177. $$\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx^2=-\left.\frac{1}{2}e^{-x^2}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{2}\left(e^0-e^{-\infty}\right)=\frac{1}{2}.$$

178. $$\int_0^{\infty}x\cos xdx=\int_0^{\infty}xd(\sin x)=\left.x\sin x\right|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\sin xdx=\left.\left(x\sin x+\cos x\right)\right|_0^{\infty}=$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin x+\cos x\right)-1.$ Последната граница не съществува и значи интеграла е разходящ.

179. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x^4}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+1\right)x^2}=I$. Това е интеграл от рационална функция.

$\dfrac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$. След привеждане под общ знаменател и приравняване на коефициентите пред еднаквите степени получаваме :
$A=C=0, \quad B=1, \quad D=-1 \quad \Rightarrow$

$$I=\int_0^1\frac{dx}{x^2+x^4}=-\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+1\right)}+\int_0^1\frac{dx}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x\right)\Bigg|_0^1=\infty-1-\frac{\pi}{4}+0=\infty.$$

Интегралът е разходящ.

180. $$\int_0^2\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{4/5}}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{d\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^{4/5}}=\frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2-1\right)^{1/5}}{\frac{1}{5}}\Bigg|_0^2=\frac{\left(x^2-1\right)^{1/5}5}{2}\Bigg|_0^2=\frac{5}{2}\left(3^{1/5}+1\right).$$

181. $$\int_1^e\frac{dx}{x\ln^{\frac{1}{2}}x}=\int_1^e\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln^{\frac{1}{2}}x}=\frac{2\ln^{1/2}x}{1}\Bigg|_1^e=2\ln^{1/2}e-2\ln^{1/2}1=2-0=2.$$

182. $$\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}=\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}.$$ Ще използваме субституция на Ойлер

$\sqrt{-x^2+6x-8}=t(x-2) \quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{\dfrac{4-x}{x-2}} \quad\Rightarrow x=\dfrac{4+2t^2}{1+t^2}$. Определяме след

диференциране $dx=\dfrac{-4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$, както и $\sqrt{-x^2+6x-8}=\dfrac{2t}{1+t^2}$. Тогава имаме:

$$\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}=\int_{x=2}^{x=4}\frac{\frac{-4t}{1+t^2}\,dt}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int_{x=2}^{x=4}-2dt=-2t\Bigg|_{x=2}^{x=4}=-2\sqrt{\frac{4-x}{x-2}}\Bigg|_2^4=\infty.$$

Интегралът е разходящ.

183. $$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\ln^{\frac{1}{2}}x}=\int_1^{e^2}\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln^{\frac{1}{2}}x}=\frac{2\ln^{1/2}x}{1}\Bigg|_1^{e^2}=2\ln^{1/2}e^2-2\ln^{1/2}1=2\sqrt{2}-0=2\sqrt{2}.$$

184. $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\frac{1}{x^2}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\frac{1}{x^2}\, d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x^2}\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2}.$

Последната граница не съществува понеже $\sin x$ е 2π -периодична функция, тогава интегралът е разходящ.

185. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+2x^2+5x^4} < \int_1^{\infty}\frac{dx}{5x^4} = \frac{1}{5}.\frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-0\right) = \frac{1}{15} < \infty.$ Интегралът е сходящ.

186. $\int_1^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{2+x\sqrt{x}} \le \int_1^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|dx}{2+x\sqrt{x}} < \int_1^{\infty}\frac{dx}{2+x\sqrt{x}} < \int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}} = \frac{x^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{\infty} = 2 - \frac{1}{\infty} = 2 < \infty.$

Интегралът е сходящ.

187. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x} = \int_{e^2}^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln\ln x} \ge \int_2^{\infty}\frac{dy}{\ln y} > \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u} = \frac{\ln u}{1}\Bigg|_{\ln 2}^{\infty} = \infty.$ Интегралът е разходящ.

188. $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = I.$ Полагаме $y=\frac{1}{x}$,т.е. $x=\frac{1}{y}$ тогава имаме :

$I = -\int_0^1 x^{\frac{5}{3}}\cos\frac{1}{x}\, d\frac{1}{x} = -\int_1^{\infty} y^{-\frac{5}{3}}\cos y\, dy \le \int_1^{\infty} y^{-\frac{5}{3}}dy = -\frac{3}{2}y^{-\frac{2}{3}}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{3}{2} < \infty.$ Сходящ е .

189. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x} = I.$ Използваме, че $e^x - \cos x \approx x$ в околност на нулата, понеже

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{1} = 1$, тогава имаме $I \approx \int_0^1\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \infty.$ Интегралът е разходящ.

190. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)(1-x)}} \le \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$ Понеже порядъкът в знаменателя е $\frac{1}{2}<1$, то последният интеграл е сходящ, а тогава и изходният интеграл е сходящ по признака за сравняване на редове.

<u>РЕШЕНИЯ НА ПРИМЕРНИТЕ ВАРИАНТИ ЗА ПИСМЕН ИЗПИТ</u>

<u>ВАРИАНТ 1</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

Прилагаме два пъти правилото на Лопитал, тогава получаваме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 5x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(5\sin 5x)'}{(2x)'} = =\lim_{x\to 0}\frac{25\cos 5x}{2} = \frac{25}{2}.$$

2. Изследвайте и постройте графиката на функцията $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Определяме дефиниционната област $D: x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$, т.е. $x\neq -1$ и $x\neq 1$. Пресмятаме при x=0 и имаме $y(0)$=0.

За <u>вертикални асимптоти</u> ще пресметнем границите, когато аргументът клони към точките на прекъсване от двете страни:

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{+0}=-\infty$ и от дясно $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{-0}=+\infty$. Аналогично имаме:

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{-0}=-\infty$ и от дясно $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$. Следователно правите x=-1 и x=1 са вертикални асимптоти за функцията.

За <u>хоризонтални (или наклонени) асимптоти</u> ще разгледаме положението ѝ в т. $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=-0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=+0$.

Следователно правата y=0 е и лява и дясна хоризонтална асимптота..

За <u>монотонност и изпъкналост</u> имаме $y'=(\dfrac{x}{x^2-1})'=\dfrac{1.\left(x^2-1\right)-x.2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}<0$

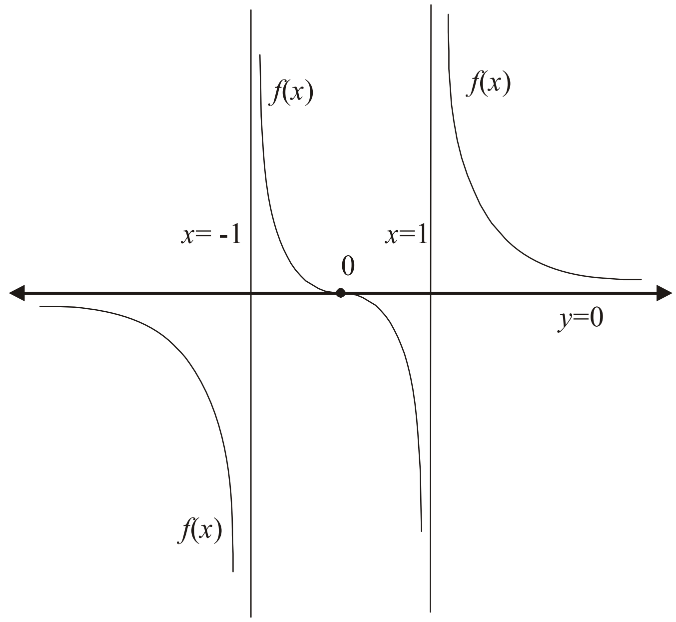
следователно функцията е намаляваща навсякъде.

Намираме $y''=(\dfrac{x}{x^2-1})''=(\dfrac{-1-x^2}{(x^2-1)^2})'=\dfrac{-2x(x^2-1)^2+\left(x^2+1\right)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=$

$=\dfrac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

Тъй като $y''(0)=0$ това означава, че при $x=0$ функцията сменя изпъкналостта си.

Ще отбележим, че функцията е нечетна и следователно е симетрична относно началото на координатната система. Направените изследвания са достатъчни за построяването на графиката на функцията.



3. Пресметнете: $\int \frac{2x^2+1}{\left(x^2+2\right)\left(x+1\right)}dx$

Ще разложим рационалната функция на елементарни дроби:

$\frac{2x^2+1}{\left(x^2+2\right)\left(x+1\right)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x+1}$, т.е. $2x^2+1 = (Ax+B)(x+1) + (x^2+2)C$. След приравняване на коефициентите пред еднаквите степени вляво и дясно получаваме система за определяне на коефициентите:

$$\begin{aligned} 2 &= A + C \\ 0 &= A + B \\ 1 &= B + 2C \end{aligned}.$$

Събираме първото и третото уравнение и използваме второто уравнение и получаваме, че $3 = 3C$, т.е. $C = 1$. Тогава имаме $A = 1$ и $B = -1$. За интеграла имаме:

$$\int \frac{2x^2+1}{\left(x^2+2\right)\left(x+1\right)}dx = \int \frac{x-1}{\left(x^2+2\right)}dx + \int \frac{dx}{\left(x+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)}d(x^2+2) - \int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)} + \ln\left|x+1\right|$$

$=$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\ln|x+1|+C=\ln(|x+1|\sqrt{x^2+2})-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

4. Намерете лицето на фигурата между правите x = 0; y = 0; x = 1 и графика на функцията $f(x)=xe^{2x}$.

За лицето имаме:

$$S=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 xde^{2x}=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}\ \Big|_0^1-\int_0^1 e^{2x}dx\right)=-\frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x}d(2x)+\frac{1}{2}e^2-0=$$

$$=-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}e^2=-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}e^0+\frac{1}{2}e^2=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$$

5. Решете диференциалното уравнение: $y'+\frac{1}{x}y=2e^x$.

По формулата за решаване на линейно уравнение имаме:

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(2e^x e^{\int\frac{dx}{x}})dx+C\right)=e^{-\ln x}(\int 2e^x xdx+C)=\frac{1}{x}(2\int xde^x+C)=$$

$$=\frac{1}{x}(2xe^x-2e^x+C).$$

В последното равенство приложихме интегриране по части.

ВАРИАНТ 2

1. Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^5+1000x^2+1}{4x^5-8x}$.

Понеже степените на полиномите в числителя и знаменателя са равни, то границата е равна на отношението на коефициентите пред най-високите степени. В случая имаме: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

2. Пресметнете производната на $f(x)=4\sin(x^2)-5\ln x$

$$f'(x)=4[\sin(x^2)]'-5(\ln x)'=4\cos x^2.(x^2)'-\frac{5}{x}=8x.\cos x^2-\frac{5}{x}.$$

3. Пресметнете интервалите на монотонност и изпъкналост, както и локалните екстремуми за функцията $f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$, преди това определете дефиниционната област за f(x).

Определяме дефиниционната област $D: x \in (-\infty,1) \cup (1,\infty)$, т.е. $x \neq 1$. Пресмятаме производната: $y' = f'(x) = \dfrac{(x^2-4)'(x-1) - 1.(x^2-4)}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2 - 2x - x^2 + 4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 + 3}{(x-1)^2} = 1 + \dfrac{3}{(x-1)^2} > 1 > 0$. Тогава функцията е монотонно растяща навсякъде в дефиниционната си област и няма локални екстремуми. За изпъкналостта ни трябва знакът на втората производна:

$y'' = (y')' = \left(1 + \dfrac{3}{(x-1)^2}\right)' = -\dfrac{6}{(x-1)^3}$. При $x < 1$, то $y'' > 0$ и функцията е изпъкнала, а при $x > 1$ имаме $y'' < 0$ и функцията е вдлъбната.

4. Пресметнете определения интеграл: $\int_1^e \left(\dfrac{\ln^2 x}{x} + 5x\right) dx = ?$

$$\int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{x} + 5x\right) dx = \int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{1}\right) d(\ln x) + \int_1^e (5x) dx =$$

$$\frac{\ln^3 x}{3}\Bigg|_1^e + \frac{5}{2}x^2\Bigg|_1^e = \frac{1}{3} + \frac{5e^2}{2} - \frac{5}{2} = \frac{5e^2}{2} - \frac{13}{6}.$$

5. Решете задачата на Коши: $y'' - 5y' + 6y = 4e^x$ при $y(0) = 3; y'(0) = 5$

Решаваме характеристичното уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имаме $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$. Тогава имаме за хомогенното уравнение $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Тогава частното решение ще търсим от вида $\bar{y} = c.e^x$. Заместваме в уравнението и имаме $(ce^x)'' - 5(ce^x)' + 6ce^x = 4e^x$, 2*c*=4 или *c*=2 и $\bar{y} = 2e^x$.

Тогава $y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 2e^x$,а оттук имаме $y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + 2e^x$.
Използваме условията на Коши: $y(0) = 3 = C_1 + C_2 + 2$ и $y'(0) = 5 = 2C_1 + 3C_2 + 2$, решаваме тази система
$C_1 = 1 - C_2$, от второто уравнение $3 - 3C_2 = 2C_1$, оттук $C_1 = 0,\quad C_2 = 1$.
Окончателно получаваме $y = e^{3x} + 2e^x$.

ВАРИАНТ 4

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x} = \dfrac{0}{0}$ Прилагаме правило на Лопитал.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}-3}{5\sin(10x)}=\dfrac{0}{0}$ Отново Лопитал $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3e^{3x}-3\right)'}{\left(5\sin 10x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{50\cos 10x}=\frac{9}{50}=0{,}18$$

2. Очевидно няма вертикални и хоризонтални асимптоти $/\ y=x+2\operatorname{arctg}x$ е дефинирана за $\forall$x и $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$ /. Ще изследваме за наклонени асимптоти:

<u>Наклонена дясна асимптота</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x+2\operatorname{arctg}x\right)}{x}=1+0=1=k_1$

$l_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2\operatorname{arctg}x-1.x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\operatorname{arctg}x=2.\dfrac{\pi}{2}=\pi$

$y=1.x+\pi$ е дясна наклонена асимптота

<u>Лява наклонена асимптота</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+2\operatorname{arctg}x}{x}\right)=1+0=1=k_2$

$l_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2\operatorname{arctg}x-1.x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\operatorname{arctg}x=2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$

$y=1.x-\pi$ е лява наклонена асимптота

3. $\displaystyle\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, полагаме $\sqrt[3]{x}=t$ тогава $x=t^3; dx=3t^2dt$, заместваме

$$\int\frac{\sin t}{t^2}3t^2dt=-3\cos t+C=-\cos\sqrt[3]{x}+C$$

4. $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\left(\sin x\right)=$ интегрираме по части

$$=x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\left(0-1\right)=\frac{\pi}{2}-1$$

5. a) $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$ След делене $\Rightarrow$

$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$ интегрираме$\Rightarrow$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dy^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} = C$$

$\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = C$. Използваме $y(0) = \frac{1}{2}$ и имаме $\sqrt{1-\frac{1}{4}} + 1 = C = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \Rightarrow$

частният интеграл: $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

б) $y' = y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = dx$. Интегрираме $\int \frac{dy}{y} = x + C_1 \Rightarrow$ (ако $C_1 = \ln C$ при $C > 0$)

$\ln y = x + \ln C \Rightarrow y = e^x.C$ (*). Използваме началното условие $y(1) = 3e$

$3e = e^1.C \Rightarrow C = 3$ тогава частния интеграл е след заместване в (*) $y = 3e^x$