Записки от лекциите по „Статистика“
за специалност „Икономика на транспорта“

ОСНОВИ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

от гл. ас. д-р Драго Михалев

§1. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаториката е раздел от Математиката, който намира широко приложение в много теоретични и приложни задачи на различни дялове от математиката, физиката, статистиката, икономиката, механиката и др. Ще изложим основните нейни понятия и ще представим някои техни приложения и ще решим конкретни задачи и примери.

Нека са ни дадени n на брой елемента (обекта, числа) от някакво множество. Питаме се: по колко различни начина можем да подредим тези обекти? Ясно е, че на първо място можем да сложим всеки от обектите, т.е. възможностите са n на брой. На второ място можем да поставим всеки елемент от останалите $(n-1)$. Тогава за подредбата на първите две места възможностите са $n(n-1)$ на брой. Като разсъждаваме аналогично, на k-то място можем да поставим всеки от останалите $n-(k-1)=n-k+1$ обекта, т.е. за подредбата на първите k места имаме $n(n-1)\dots(n-k+1)$ на брой възможности и в частност за последното n-то място ще остане един обект. Така обектите могат да бъдат подредени по $1\,.\,2\dots(n-1)n=n!$ начина. Последното означение четем „n факториел“, с което означаваме произведението на всички естествени числа от 1 до n включително. Определяме $0!=1$, тогава за всяко естествено n е вярно равенството $n!=n\,.\,(n-1)!$.

Определение. *Пермутация на n елемента* (*наредена n-торка*) ще наричаме всяка от възможните подредби (съединение) на n-те елемента.

Броят на всички пермутации от n елемента ще отбелязваме с P_n и според горните разсъждения $P_n=n!$.

Пример 1.1. Колко петцифрени числа с различни цифри можем да запишем с цифрите 1, 2, 4, 5 и 8?

Тъй като цифрите, които ще използваме са пет и числата са петцифрени, то задачата се свежда до намиране на броя на пермутациите от 5 елемента: $P_5 = 5! = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5 = 120$. Броят на петцифрените числа с различни цифри, съставени от цифрите 1, 2, 4, 5 и 8 е 120.

Тези разсъждения са валидни и ако използваме кои да са пет различни от нула цифри (петцифрено число не може да започва с нула). Броят на петцифрените числа с различни цифри, съставени от кои да са пет, предварително зададени различни от нула цифри е 120. □

Определение. *Вариация на n елемента от клас k* ще наричаме всяка от възможните подредби (съединение) на различни k от всички n елемента.

В този случай съединенията се различават или по състава си или по подредбата си. Броят на всички вариации на n елемента от клас k ще отбелязваме с V_n^k. Тогава, съгласно горните разсъждения е в сила:

$$V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\ .$$

Пример 1.2. Колко петцифрени числа с различни цифри можем да запишем като използваме цифрите от 1 до 9 включително?

Задачата се свежда до намиране на броя на вариациите на 9 елемента от клас 5, т.е. трябва да намерим $V_9^5 = \dfrac{9!}{4!} = 9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5 = 15120$. Следователно броят на петцифрените числа с различни цифри, съставени с цифрите от 1 до 9 включително е 15120. □

Определение. *Комбинация на n елемента от клас k* ще наричаме всяка възможна извадка (съединение) на различни k от всички n елемента.

Съединенията се различават по състава си, като не се интересуваме от подредбата на елементите. Броят на всички комбинации на n елемента от клас k ще бележим с C_n^k. Тогава

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!} = \binom{n}{k}\ .$$

Пример 1.3. Треньор по баскетбол разполага с 9 равностойни състезатели. Колко различни стартови петорки може да формира треньорът?

Тъй като играчите са девет, а началната петорка се състои от пет състезатели, то задачата се свежда до намиране на броя на комбинациите на 9 елемента от клас 5. Пресмятаме:

$$C_9^5 = \frac{9!}{4!\,.\,5!} = \frac{V_9^5}{P_5} = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{5!} = \frac{15120}{120} = 126\ .$$

Броят на началните петорки, които може да формира треньорът е 126. $\square$

Означението $\binom{n}{k}$ ще четем: „n над k“. Често $C_n^k = \binom{n}{k}$ се нарича и $(k+1)$-ви биномен коефициент при повдигане на степен n. От формулата $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}$ следват свойствата

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\ , \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\ .$$

В сила е следното тъждество, известно като *Нютонов бином*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n\ .$$

Оттук лесно се извеждат някои тъждества с участието на биномните коефициенти. Например:

1) при $a = 1,\ b = 1$ получаваме $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;

2) при $a = 1,\ b = -1$ получаваме $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k} + 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}$;

3) а също и $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$.

Сега ще разгледаме извадки с повторение (с връщане). Нека са ни дадени n на брой елемента от някакво множество. По колко различни начина можем да направим извадка с определена дължина от тези елементи, ако всеки път след като вземем даден елемент го връщаме при останалите и за следващата позиция избираме отново измежду всички елементи?

Понеже при подредена извадка с дължина k за всяка позиция можем да използваме всеки от n-те елемента, то възможностите са n^k; в частност при $n = k$ имаме n^n възможности.

Определение. *Вариация на n елемента от клас k с повторение* ще наричаме всяка от възможните подредби (съединение) на k елемента с възможни техни повторения от всички n елемента.

Така съединенията се различават или по състава си или по подредбата си. Броят на всички вариации на n елемента от клас k с повторение ще отбелязваме с $\tilde{V}_n^k$, като

$$\tilde{V}_n^k = n^k \ .$$

Пример 1.4. Колко петцифрени числа можем да запишем с цифрите 1, 2, 4, 5 и 8?

Тъй като цифрите са пет и числата са петцифрени, то задачата се свежда до намиране на броя на вариациите с повторение от 5 елемента и 5 клас $\tilde{V}_5^5 = 5^5 = 3125$. Броят на петцифрените числа съставени от цифрите 1, 2, 4, 5 и 8 е 3125.

Тези разсъждения важат и ако използваме кои да са пет различни от нула цифри (петцифрено число не може да започва с нула). Броят на петцифрените числа, съставени от кои да са пет, предварително зададени различни от нула цифри е 3125. $\square$

Пример 1.5. Колко различни петцифрени числа можем да запишем като използваме цифрите от 1 до 9 включително?

Тъй като цифрите са девет, а числата са петцифрени, то задачата се свежда до намиране на броя на вариациите с повторение на 9 елемента от клас 5, т.е. трябва да намерим $\tilde{V}_9^5$. Понеже $\tilde{V}_9^5 = 9^5 = 59049$, то броят на петцифрените числа, съставени с дадените цифри от 1 до 9, включително е 59049. $\square$

Определение. *Комбинация на n елемента от клас k с повторение* ще наричаме всяка извадка (съединение) на k с възможни техни повторения от всички n елемента.

В този случай съединенията се различават по състава си и не се интересуваме от подредбата им. Броят на всички комбинации на n елемента от клас k ще отбелязваме с $\tilde{C}_n^k$, като е в сила следното равенство:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Пример 1.6. Имаме четири карти – по една спатия, каро, купа и пика. Колко начина има за тегленето на две от четирите карти, ако теглим първата карта, отбелязваме цвета ѝ, връщаме я обратно и после теглим втората карта, като в крайния резултат не правим разлика между първа и втора карта?

Дадените карти са четири, а изтеглените карти са две. Следователно търсим броя на комбинациите с повторение на 4 елемента от клас 2. Имаме $\tilde{C}_4^2 = C_5^2 = \binom{5}{2} = \dfrac{5\,.\,4}{1\,.\,2} = 10$ и тегленето на картите може да стане по 10 начина. $\square$

§2. ОПИТ. СЛУЧАЙНИ СЪБИТИЯ. КЛАСИЧЕСКО И СТАТИСТИЧЕСКО ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗА ВЕРОЯТНОСТ

Теорията на вероятностите се занимава с изучаването на закономерностите, които са характерни за масовите случайни явления. Това са такива явления, които имат случаен характер и се случват или не при различните изпитания, направени при сравнително постоянни условия.

1. Основни понятия.

Опит (*експеримент*) ще наричаме осигуряването на такъв комплекс от сравнително постоянни условия, който може да се възпроизведе многократно и е такъв, че дадено явление е възможно да се появи или не с някаква случайна честота. Доста често този комплекс от условия не зависи само от човешкия фактор, а и от външни условия, например природата и заобикалящата ни среда.

Елементарно случайно събитие е всяко събитие, което може да се получи като изход (резултат) от проведения опит. Елементарните случайни събития са взаимно изключващи се и в резултат от опита се случва само едно от тях. *Пространство от елементарни случайни събития* ще наричаме съвкупността от всички елементарни случайни събития и ще го означаваме с $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$. Пространството Ω може да съдържа краен или безкраен брой елементи.

Пространството Ω е *дискретно*, ако съдържа краен или безкраен, но изброим брой елементи. Да припомним, че едно множество е изброимо, ако елементите му могат да се подредят в редица.

Пример 2.1. Даден е правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Колко и кои са елементарните случайни събития, които могат да се случат при хвърлянето на зара?

Тъй като зарът е правилен и има 6 страни, то възможни са шест елементарни изхода. Тогава и елементарните случайни събития са 6: ω_1 – пада се 1 точка; ω_2 – падат се 2 точки; ω_3 – падат се 3 точки; ω_4 – падат се 4 точки; ω_5 – падат се 5 точки и ω_6 – падат се 6 точки. □

Пространството Ω е *непрекъснато*, ако съдържа цял интервал от стойности.

Събитие наричаме всяко подмножество на пространството Ω. Събитията ще означаваме с големи латински букви: $A, B, M, \dots$. Всички елементарни събития, принадлежащи на събитието A се наричат *бла-*

гоприятни за A. В общия случай едно събитие се случва понякога или не се случва, т.е. сбъдването на дадено събитие има *случаен* характер.

Пример 2.2. Даден е правилен зар, на който са отбелязани 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. С A да означим събитието да се падне четен брой точки. Кои са благоприятните елементарни случайни събития за събитието A при хвърлянето на зара?

При хвърлянето на зара благоприятните елементарни случайни събития за събитието A са 3: ω_2 – падат се 2 точки, ω_4 – падат се 4 точки, ω_6 – падат се 6 точки. □

Достоверно събитие се нарича такова събитие, което съдържа всички елементарни събития, т.е. то се случва винаги при извършването на опит. Достоверното събитие ще означаваме с Ω. *Невъзможно събитие* се нарича всяко събитие, което не съдържа нито едно елементарно събитие, т.е. когато не се случва никога. Невъзможното събитие ще означаваме с $\emptyset$.

Противоположно на A *събитие* се нарича такова събитие, което се осъществява тогава и само тогава, когато не се осъществява събитието A. Противоположното събитие на A ще означаваме с $\bar{A}$.

Пример 2.3. Даден е правилен зар, на който са отбелязани 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Кое е достоверното събитие? Дайте пример на невъзможно събитие. Кое е противоположното събитие $\bar{A}$ на събитието A – да се паднат четен брой точки? Кои са елементарните случайни събития, които са благоприятни за него при хвърлянето на зара?

Както в Пример 2.1, елементарните случайни събития са: ω_1 – пада се 1 точка, ω_2 – падат се 2 точки, ω_3 – падат се 3 точки, ω_4 – падат се 4 точки, ω_5 – падат се 5 точки и ω_6 – падат се 6 точки.

Достоверното събитие Ω е да се паднат от 1 до 6 точки, включително. Невъзможно събитие е например да се паднат 8 точки или да се паднат точно 3,5 точки. Противоположното събитие $\bar{A}$ на събитието A е да се паднат нечетен брой точки. При хвърлянето на зара благоприятните елементарни случайни събития за събитието $\bar{A}$ – да се паднат нечетен брой точки – са 3: ω_1, ω_3, ω_5. □

Обединение (*сума*) на събитията A и B се нарича такова събитие, което се осъществява винаги, когато се осъществява поне едно от двете събития A и B. Обединението на събитията A и B ще означаваме с $A \cup B$, но се използва и означението $A + B$.

Сечение (*произведение*) на събитията A и B се нарича такова събитие, което се осъществява винаги, когато се осъществяват едновременно и събитието A и събитието B. Сечението на събитията A и B ще означаваме с $A \cap B$, но се използва и означението AB.

Събитията A и B ще наричаме *несъвместими*, ако $A \cap B = \emptyset$.

Разлика на събитията A и B се нарича събитие, състоящо се от елементарните събития, които принадлежат на събитието A и не принадлежат на събитието B. Разликата на събитията A и B ще означаваме с $A \setminus B$.

Пример 2.4. Даден е правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Нека събитието A е да се паднат четен брой точки, а събитието C е да се паднат по-малко от 4 точки. Кое събитие е сечението на случайните събития A и C? Кое събитие е обединението на случайните събития A и C?

Сечението $A \cap C$ на събитията A и C е да се паднат едновременно четен брой точки и да се паднат по-малко от 4 точки, т.е. да се паднат точно две точки. Така, че $A \cap C = \omega_2$ – падат се 2 точки.

Обединението $A \cup C$ на събитията A и C е да се паднат четен брой точки или да се паднат по-малко от 4 точки. Тогава събитието $A \cup C$ се състои от следните елементарни случайни събития: ω_1 – пада се 1 точка, ω_2 – падат се 2 точки, ω_3 – падат се 3 точки, ω_4 – падат се 4 точки и ω_6 – падат се 6 точки. Така $A \cup C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$. □

Събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се наричат *несъвместими в съвкупност*, ако случването на кое да е от тях изключва случването на останалите събития.

Събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуват *пълна група*, ако при всеки опит може да се случи кое да е от тях и не може да се случи събитие, което да е несъвместимо с тях.

2. Класическа вероятност.

Вероятността е основно понятие в теорията на вероятностите.

Определение. *Класическа вероятност* $P(A)$ на събитието A се нарича отношението на броя m на благоприятните елементарни събития за събитието A към броя n на всички елементарни събития, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n} \ .$$

За вероятността са изпълнени следните свойства:

1) Вероятността на достоверното събитие е единица: $P(\Omega) = 1$.

2) Вероятността на невъзможното събитие е нула: $P(\emptyset) = 0$.

3) За вероятността на кое да е събитие A: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример 2.5. В урна се намират 2 бели и 8 черни топки. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността тя да е бяла? Каква е вероятността тя да е черна?

Нека A е събитието да извадим бяла топка от урната, а B е събитието да извадим черна топка. Броят на благоприятните елементарни събития за събитието A е $m = 2$. Общият брой на елементарните събития е $n = 10$. Съгласно класическото определение за вероятност имаме:

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \ .$$

Броят на благоприятните елементарни събития за събитието B е $m = 8$. Тогава

$$P(B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \ . \qquad \square$$

Забележка. В Пример 2.5 събитията A, B образуват пълна група събития и сумата от вероятностите на тези събития е

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1 \ .$$

Пример 2.6. В урна има 2 бели и 8 черни топки. Изваждат се по случаен начин две топки. Каква е вероятността извадените две топки да са: а) бели; б) черни; в) бяла и черна?

Нека A е събитието двете извадени топки да са бели, B е събитието двете извадени топки да са черни, C е събитието двете извадени топки да са бяла и черна. Общият брой на елементарните събития да извадим ненаредена двойка топки от всички 10 топки е $n = \binom{10}{2}$.

а) Броят на благоприятните елементарни събития за събитието A е $m = 1$. Тогава имаме:

$$P(A) = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45} \ .$$

б) Броят на благоприятните елементарни събития за събитието B е $m = \binom{8}{2}$. Тогава

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{8\,.\,7}{10\,.\,9} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45} \ .$$

в) Броят на благоприятните елементарни събития за събитието C е равен на произведението от случаите да извадим 1 бяла топка от двете бели топки по броя на случаите да извадим една черна топка от 8-те черни, т.е.

$$m = \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{1} .$$

Следователно

$$P(C) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{2 \,.\, 8}{45} = \frac{16}{45} . \qquad \square$$

Забележка. В Пример 2.6 трите събития A, B и C изчерпват всички случаи, така че те образуват пълна група събития. Ще отбележем, че сумата от вероятностите на тези три събития е

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{45} + \frac{28}{45} + \frac{16}{55} = 1 .$$

3. Статистическа вероятност.

Провеждаме серия от n опита, които са извършени при едни и същи условия. За дадено събитие A с $m(n)$, където $0 \le m(n) \le n$, да означим броя на случаите в които то се е осъществило.

Определение. *Относителна честота* $P^*(A)$ на събитието A при тази серия от изпитания се нарича отношението на броя $m(n)$ на случаите в които събитието A се е сбъднало, към броя n на всички опити, т.е.

$$P^*(A) = \frac{m(n)}{n} .$$

Въпреки, че между формулите за $P(A)$ и $P^*(A)$ има известно сходство, те са различни по същността си. Класическата вероятност $P(A)$ има предимно теоретичен характер за изчисляване на вероятността и не изисква провеждането на опити. Относителната честота $P^*(A)$ служи за експериментално определяне на честотата на събитието A и предполага провеждането на серия опити. За относителната честота $P^*(A)$ на събитието A е присъща стабилност при провеждане на голям брой опити n и тя показва статистическа закономерност, присъща на изследваното явление. Това е основание, за да дадем следното определение.

Определение. *Статистическа вероятност* $P(A)$ на събитието A се нарича това число $P(A)$, около което се групират относителните честоти при голям брой опити n, т.е.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P^*(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} \ .$$

Пример 2.7. Английският математик Пирсон прави голям брой опити с хвърляне на монета за ези-тура (лице-герб). В следващата таблица са поместени резултатите от неговите експерименти.

Брой опити	Герб	Относителна честота
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

$\square$

§3. ТЕОРЕМИ ЗА ДЕЙСТВИЯ С ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема 3.1 (Теорема за събиране на вероятности). *Ако събитията A и B са несъвместими, то вероятността на обединението на тези събития е сума от вероятностите на тези събития, т.е.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ .$$

Доказателство. Нека m_1 е броят на благоприятните за събитието A елементарни събития, m_2 е броят на благоприятните за събитието B елементарни събития. Понеже събитията A и B са несъвместими, то $m_1 + m_2$ е броят на благоприятните за събитието $A \cup B$ елементарни събития. От определението за вероятност, ако n е броят на всички елементарни събития, имаме:

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B) \ . \qquad \square$$

Следствие 3.2. *Ако $\bar{A}$ е противоположното на A събитие, то за вероятността на $\bar{A}$ е в сила:*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \ .$$

Доказателство. Събитието $\bar{A}$ и събитието A са несъвместими и се допълват до достоверното събитие Ω, т.е.

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \ .$$

От Теорема 3.1 следва

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \ .$$

От тези две равенства получаваме

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \ ,$$

или $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. □

Теоремата за събиране на вероятности може да се обобщи за повече от две събития несъвместими в съвкупност.

Теорема 3.3. *Ако събитията $A_1, A_2, \dots, A_n$ са несъвместими в съвкупност, то вероятността на обединението на тези събития е сума от вероятностите на тези събития:*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \ .$$

Доказателството е аналогично на представеното доказателство на предната теорема.

Следствие 3.4. *Ако събитията $A_1, A_2, \dots, A_n$ са несъвместими в съвкупност и образуват пълна група, то за вероятностите им е в сила*

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1 \ .$$

Две събития A и B ще наричаме *независими*, ако вероятността за осъществяване на събитието A не зависи от това, дали се е осъществило или не събитието B и обратно.

Пример 3.1. Хвърляме едновременно два правилни зара. Очевидно е, че това какво ще се падне на единия зар не зависи от това какво се е паднало на другия зар. Например събитието – паднала се е шестица на втория зар, не зависи от това дали на първия зар се е случило или не събитието – паднала се е шестица на първия зар.

Събитията $A_1, A_2, \dots, A_n$ ще наричаме *независими в съвкупност*, ако всяко от тях и коя да е комбинация на останалите събития са независими. Събитията $A_1, A_2, \dots, A_n$ ще наричаме *две по две независими*, ако всеки две от тях са независими.

Теорема 3.5. *Ако събитията A и B са независими, то вероятността на сечението им е произведение от вероятностите на тези събития, т.е.*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\ .$$

Доказателство. Нека n_1 е броят на възможните елементарни изходи за събитието A, а m_1 е броят на благоприятните за събитието A елементарни събития. Нека n_2 е броят на възможните елементарни изходи за събитието B, а m_2 е броят на благоприятните за събитието B елементарни събития. Понеже събитията A и B са независими, то $m_1 m_2$ е броят на благоприятните за събитието $A \cap B$ елементарни събития от всичко $n_1 n_2$ възможни елементарни изходи за събитието $A \cap B$. От определението за вероятност следва

$$P(A \cap B) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A)\,P(B)\ . \qquad \square$$

Теорема 3.6. *Ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими в съвкупност, то вероятността на сечението на тези събития е произведение от вероятностите на тези събития, т.е.*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)\ .$$

Доказателството е аналогично на доказателството на предишната теорема.

Следствие 3.7. *Нека са дадени събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$, които образуват пълна група и са независими в съвкупност. Тогава вероятността на събитието A – да се случи поне едно от тези събития е равна на единица минус произведението от вероятностите на противоположните събития $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$, т.е.*

$$P(A) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k)\ .$$

Доказателство. Противоположното на събитието A е събитието $\bar{A}$ – да не се случи нито едно от събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$. То е равно на сечението на събитията $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$, които са независими в съвкупност. Прилагаме Теорема 3.6 и получаваме:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k)\ . \qquad \square$$

Пример 3.2. Хвърляме едновремено два правилни зара, на стените на които са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Каква е вероятността за събитието: A – да се паднат две шестици; б) B – да се паднат петица и шестица; в) Z – да се падне чифт?

Очевидно е, че това какво ще се падне на единия зар не зависи от това, какво се е паднало на другия зар. Нека A_k е събитието да се падне k на първия зар, $k = 1, 2, \ldots, 6$, а B_m е събитието да се падне m на втория зар, $m = 1, 2, \ldots, 6$.

а) Събитието A се получава като сечение на събитията A_6 и B_6. Понеже $P(A_6) = \dfrac{1}{6}$ и $P(B_6) = \dfrac{1}{6}$, от Теорема 3.6 имаме:

$$P(A) = P(A_6)\, P(B_6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}\ .$$

б) Събитието B се получава като обединение на събитието C – на първия зар се пада шестица, а на втория зар се пада петица и събитието D – на първия зар се пада петица, а на втория зар се пада шестица. Тъй като събитието C е сечение на събитията A_6 и B_5, то

$$P(C) = P(A_6)\, P(B_5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Събитието D е сечение на събитията B_6 и A_5. Тогава

$$P(D) = P(B_6)\, P(A_5) = \frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{36}\ .$$

Окончателно за вероятността на събитието B получаваме:

$$P(B) = P(C) + P(D) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}\ .$$

в) Събитието Z е обединение на събитията Z_1 – падат се две единици, Z_2 – падат се две двойки, Z_3 – падат се две тройки, Z_4 – падат се две четворки, Z_5 – падат се две петици, $Z_6 = A$ – падат се две шестици. Както в подточка а):

$$P(Z_1) = P(Z_2) = P(Z_3) = P(Z_4) = P(Z_5) = P(Z_6) = P(A) = \frac{1}{36}\ .$$

Тогава

$$P(Z) = P(Z_1)+P(Z_2)+P(Z_3)+P(Z_4)+P(Z_5)+P(Z_6) = 6\cdot\frac{1}{36} = \frac{1}{6}\ . \qquad \square$$

Сега ще формулираме едно друго обобщение на торемата за събиране на вероятности – за съвместими събития.

Теорема 3.8. *Ако събитията A и B са съвместими, то вероятността на обединението на тези събития е сума от вероятностите на тези събития минус вероятността на сечението им, т.е.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ .$$

Д о к а з а т е л с т в о. Разлагаме събитието $A \cup B$ на три несъвместими събития:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A\bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \ .$$

По Теорема 3.1 за събиране на вероятности на несъвместими събития имаме

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \ .$$

От

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad \text{и} \quad B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

следва съответно

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad \text{и} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \ ,$$

т.е.

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) \quad \text{и} \quad P(B) - P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap B) \ .$$

Заместваме и получаваме

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ . \qquad \square$$

Пример 3.3. Даден е правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Нека събитието A е да се паднат четен брой точки, а събитието B – да се паднат по-малко от 4 точки. Каква е вероятността на събитието $A \cap B$? Каква е вероятността на събитието $A \cup B$?

Сечението на случайните събития A и B е елементарното случайно събитие да се паднат 2 точки, чиято вероятност е $\dfrac{1}{6}$, т.е. $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Понеже $P(A) = \dfrac{1}{2}$ и $P(B) = \dfrac{1}{2}$ от Теорема 3.8 получаваме

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \ .$$

Действително, за събитието $A \cup B$ има 5 благоприятни елементарни събития от всичко 6 елементарни събития. $\square$

§4. УСЛОВНА ВЕРОЯТНОСТ. ТЕОРЕМА ЗА УМНОЖАВАНЕ НА ВЕРОЯТНОСТИ

Докато в предния параграф разглеждахме събития, които бяха независими, в настоящия ще обърнем внимание на събития, които зависят от други събития.

Събитието A ще наричаме *зависимо* от събитието B, ако вероятността за осъществяване A зависи от това, дали се е осъществило или не събитието B. Зависимостта и независимостта на събитията е винаги взаимно – ако събитието A е зависимо от събитието B, то и B е зависимо от A и обратно.

Със зависимите събития основно е свързано понятието за условна вероятност. Вероятността да се случи събитието B при условие, че се е случило събитието A, ще отбелязваме с $P(B|A)$ (или $P_A(B)$) и ще я наричаме *условна вероятност* на събитието B при условие, че се сбъднало събитието A.

Пример 4.1. Нека имаме урна, в която се намират 2 бели и 1 черна топка. Вадим 2 пъти последователно по една топка без да връщаме в урната топката, която сме извадили. С A да означим събитието – извадена е бяла топка при първото вадене, с B да означим събитието – извадена е бяла топка при второто вадене, а с C да означим – извадена е черна топка при второто вадене. Каква е условната вероятност да се случи събитието: а) B при условие, че се е случило събитието A; б) B при условие, че не се е случило събитието A; в) C при условие, че се е случило събитието A; г) C при условие, че не се е случило събитието A?

а) Ако се е случило събитието A, то за условната вероятност на събитието B при условие, че се сбъднало A имаме:

$$P(B|A) = \frac{1}{2} \ .$$

б) Ако събитието A не се е случило, то случило се е $\bar{A}$ и тогава

$$P(B|\bar{A}) = \frac{2}{2} = 1.$$

в) Ако се е случило събитието A, то за условната вероятност на събитието C при условие, че се сбъднало A имаме:

$$P(C|A) = \frac{1}{2} \ .$$

г) Ако събитието A не се е случило, то се е случило $\bar{A}$ и следователно

$$P(C|\bar{A}) = \frac{0}{2} = 0. \qquad \square$$

Теорема 4.1 (Теорема за умножение на вероятности). *Вероятността на сечението на събитията A и B е равна на произведението от вероятността на едното от тях по условната вероятност на другото, при условие, че се е сбъднало първото събитие, т.е.*

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B)\ .$$

Доказателство. Нека n е общият брой на всички елементарни случайни събития, m_1 е броят на елементарните събития, които са благоприятни за събитието A, а от тях m_2 е броят на елементарните събития, които са благоприятни за събитието B. Тогава

$$P(A \cap B) = \frac{m_2}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{m_1} = P(A)\, P(B|A)\ .$$

Аналогични са разсъжденията за доказване и на другото равенство:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)\ ,$$

защото за първо събитие можем да вземем B, а за второ A. $\square$

Следствие 4.2. *Ако събитията A и B са независими, то*

$$P(A|B) = P(A)\ .$$

Доказателство. Съгласно Теорема 4.1

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)\ ,$$

а за независими събития имаме:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)\ .$$

От тези две равенства следва, че:

$$P(A|B) = P(A)\ . \qquad \square$$

Следствие 4.3. *За условната вероятност $P(B|A)$ е в сила:*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\ .$$

Сега ще формулираме едно обобщение на теоремата за умножение на вероятности.

Теорема 4.4. *За вероятността на сечението $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ на събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е изпълнено*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1) \times \\ \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \ ,$$

където вероятността на всяко следващо събитие се пресмята при условие, че са се случили всички предходни събития.

Доказателство. Доказателството ще извършим с метода на пълната математическа индукция.

За $n = 2$ твърдението следва от Теорема 4.1 при $A_1 = A$ и $A_2 = B$.

Да допуснем, че равенството е вярно за някакво $n = k$, $k > 2$, т.е.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)\, P(A_2|A_1) \times \\ \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \ ,$$

Ще докажем, че то е вярно и за $n = k + 1$. Поради

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_{k+1} \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$

от индукционното предположение следва

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \times \\ \times P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \times \\ \times P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \ .$$

Така равенството е доказано при $n = k + 1$ и съгласно метода на математическата индукция, то е вярно за всяко естествено число $n \geq 2$. $\square$

Забележка. Събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са равнозначни и могат да бъдат подредени и по друг начин. Така ще получим цяла серия от различни формули за $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$.

Пример 4.2. От колода с 32 карти по случаен начин изтегляме последователно 4 карти без да ги връщаме обратно. Каква е вероятността: а) и четирите карти да са аса; б) от четирите карти поне една да е асо?

а) Да означим с A събитието да извадим четири аса, с A_k – събитието k-тата изтеглена карта да е асо, $k = 1, 2, 3, 4$. Тогава $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ и за пресмятането на вероятността $P(A)$ прилагаме Теорема 4.4:

$$P(A) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2)\, P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \ .$$

Имаме: $P(A_1) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$, $P(A_2|A_1) = \dfrac{3}{31}$, $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \dfrac{2}{30}$ и $P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{29}$. Следователно

$$P(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{35960} \approx 0{,}0000278\ .$$

б) Да означим с B събитието сред изтеглените четири карти да има поне едно асо и с $\bar{B}$ – противоположното събитие – да няма нито едно асо. Нека освен това B_k е събитието k-тата изтеглена карта да не е асо, $k = 1, 2, 3, 4$. Тогава $\bar{B} = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$ и по Теорема 4.4:

$$P(\bar{B}) = P(B_1)\, P(B_2|B_1)\, P(B_3|B_1 \cap B_2)\, P(B_4|B_1 \cap B_2 \cap B_3)\ .$$

За вероятността $P(\bar{B})$ намираме

$$P(\bar{B}) = \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{29} = \frac{4095}{7192} \approx 0{,}569\ ,$$

откъдето

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{4095}{7192} \approx 0{,}431\ .$$ □

Пример 4.3. От конспект с 50 въпроса студент научил само 40 въпроса. Всеки изпитен билет съдържа 3 въпроса от конспекта. За да си вземе изпита студентът трябва да знае и трите въпроса от билета, който е изтеглил. Каква е вероятността студентът да си вземе изпита?

Означаваме с A_1 събитието студентът да знае първия въпрос от изтегления изпитен билет, с A_2 – събитието студентът да знае втория въпрос от билета, с A_3 събитието студентът да знае третия въпрос, а с A – събитието студентът да знае и трите въпроса. Тогава

$$P(A) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2)\ .$$

За вероятността $P(A_1)$ имаме $P(A_1) = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$, а за условните вероятности: $P(A_2|A_1) = \dfrac{39}{49}$ и $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \dfrac{38}{48}$. Следователно

$$P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{38}{48} = \frac{247}{490} =\approx 0{,}50\ .$$

Така вероятността студентът да си вземе изпита е приблизително 50%, почти колкото вероятността да не си вземе изпита. За да се повиши вероятността студентът да си вземе изпита той трябва да научи повече от 40 въпроса. Ако научи по-малко от 40 въпроса, то вероятността да не си вземе изпита ще е по-голяма от тази да си вземе изпита. □

Ще разгледаме още един пример.

Пример 4.4. В урна има 9 бели, 5 червени и 6 сини топки. По случаен начин вадим последователно 6 топки без да връщаме обратно в урната извадените топки. Каква е вероятността да се извадят: а) 2 бели, 3 червени и 1 синя топка в този ред; б) 2 бели, 3 червени и 1 синя топка, независимо от реда на изваждането им?

а) Означаваме с A_1 събитието първата извадена топка да е бяла, с A_2 събитието събитието втората извадена топка да е бяла, с B_1 събитието третата извадена топка да е червена, с B_2 събитието четвъртата извадена топка да е червена, с B_3 събитието петата извадена топка да е червена и с C_1 събитието шестата извадена топка да е синя. Накрая с A да означим събитието първите две извадени от урната топки са бели, следващите три извадени топки са червени и шестата извадена топка е синя. Тогава имаме:

$$P(A) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(B_1|A_1\cap A_2)\,P(B_2|A_1\cap A_2\cap B_1)\times$$
$$\times\, P(B_3|A_1\cap A_2\cap B_1\cap B_2)\,P(C_1|A_1\cap A_2\cap B_1\cap B_2\cap B_3)\ .$$

Пресмятаме необходимите вероятности $P(A_1) = \dfrac{9}{20}$, $P(A_2|A_1) = \dfrac{8}{19}$, $P(B_1|A_1\cap A_2) = \dfrac{5}{18}$, $P(B_2|A_1\cap A_2\cap B_1) = \dfrac{4}{17}$, $P(B_3|A_1\cap A_2\cap B_1\cap B_2) = \dfrac{3}{16}$, $P(C_1|A_1\cap A_2\cap B_1\cap B_2\cap B_3) = \dfrac{6}{15}$, заместваме в горната формула за $P(A)$ и намираме

$$P(A) = \frac{9\,.\,8\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,6}{20\,.\,19\,.\,18\,.\,17\,.\,16\,.\,15} = \frac{3}{3230} \approx 0{,}001\ .$$

б) Нека B е събитието сред извадените 6 топки има две бели, три червени и една синя топка, независимо в какъв ред са извадени.

I начин. За намиране на вероятността на събитието B умножаваме вероятността на събитието A с броя на пермутациите от 6 елемента и разделяме на произведението на пермутациите от 2 елемента (за белите топки) по пермутациите от 3 елемента (за червените топки) по пермутациите от 1 елемент (за синята топка), т.е.

$$P(B) = \frac{P(A)\,.\,6!}{2!\,.\,3!\,.\,1!} = \frac{720\,.\,P(A)}{2\,.\,6\,.\,1} = \frac{60\,.\,3}{3230} = \frac{18}{323} \approx 0{,}056\ .$$

II начин. За пресмятането на вероятността на събитието B можем да използваме класическото определение за вероятност и формулата за умножаване на независими събития. Умножаваме броя на комбинациите от 9 елемента втори клас по броя на комбинациите от 5 елемента трети клас по броя на комбинациите от 6 елемента първи клас и полученото произведение разделяме на броя на комбинациите от 20 елемента шести клас:

$$P(B) = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{20}{6}} = \frac{9\,.\,8\,.\,5\,.\,4\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,1} \cdot \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{20\,.\,19\,.\,18\,.\,17\,.\,16\,.\,15} = \frac{18}{323} \approx 0{,}056\ .$$

Виждаме, че и по двата начина по които решихме условие б) получихме един и същ отговор. □

Сега ще дефинираме едно обобщение на биномните коефициенти, намиращо приложение в комбинаториката и вероятностите. Нека s, n и $k_1, \dots, k_s$ са естествени числа, такива че $1 \le s \le n$, $0 \le k_i \le n$ за $i = 1, \dots, s$ и $0 \le \sum_{i=1}^{s} k_i \le n$. ***Обобщен биномен коефициент*** ще наричаме израза:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \dots k_s!\,.\,\left(n - \sum_{i=1}^{s} k_i\right)!}\ .$$

Следствие 4.5. *Ако означим $k_{s+1} = n - \sum_{i=1}^{s} k_i$ в сила е следното равенство:*

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{s+1})^n = \sum_{0 \le k_1 + \dots + k_s \le n} \binom{n}{k_1, \dots, k_s} a_1^{k_1} \dots a_s^{k_s} a_{s+1}^{k_{s+1}}\ .$$

Да отбележим, че при решаването Пример 4.4, б) по I начин използвахме $P(B) = \binom{6}{2,3} P(A)$.

Пример 4.5. От колода с 32 карти изтегляме по случаен начин последователно 5 карти без да връщаме изтеглените карти обратно в колодата. Каква е вероятността тези 5 карти да бъдат 2 попа, 1 дама и 2 други, различни от дама и поп; а) ако са изтеглени точно в този ред; б) независимо от реда на тегленето им?

а) Нека с A_1 означим събитието първата изтеглена карта е поп, с A_2 – събитието втората изтеглена карта е поп, с B_1 – третата изтеглена карта е дама, с C_1 – четвъртата изтеглена карта е различна от поп и дама, C_2 – петата изтеглена карта е различна от поп и дама. Накрая, с A да означим събитието първите 2 изтеглени карти са попове, третата изтеглена карта е дама и последните 2 изтеглени карти са различни от поп и дама. Съгласно Теорема 4.4:

$$P(A) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(B_1|A_1 \cup A_2)\,P(C_1|A_1 \cap A_2 \cap B_1) \times$$
$$\times\, P(C_2|A_1 \cap A_2 \cap B_1 \cap C_1)\ .$$

В колодата поповете са 4, дамите също са 4, а различните от поп и дама карти са 24. Тогава за вероятностите имаме: $P(A_1) = \dfrac{4}{32}$, $P(A_2|A_1) = \dfrac{3}{31}$, $P(B_1|A_1 \cap A_2) = \dfrac{4}{30}$, $P(C_1|A_1 \cap A_2 \cap B_1) = \dfrac{24}{29}$ и $P(C_2|A_1 \cap A_2 \cap B_1 \cap C_1) = \dfrac{23}{28}$. Следователно

$$P(A) = \frac{4\,.\,3\,.\,4\,.\,24\,.\,23}{32\,.\,31\,.\,30\,.\,29\,.\,28} = \frac{69}{62930} \approx 0{,}001\ .$$

б) Да означим с B събитието изтеглените 5 карти да бъдат 2 попа, 1 дама и 2 други, различни от дама и поп, независимо от последователността на изтеглянето им.

I начин. Вероятността на събитието B намираме, като умножим вероятността на събитието A с обобщения биномен коефициент $\binom{5}{2,1}$:

$$P(B) = \frac{P(A)\,5!}{2!\,.\,1!\,.\,2!} = \frac{120\,P(A)}{2\,.\,1\,.\,2} = \frac{30\,.\,69}{62930} = \frac{207}{6293} \approx 0{,}032\ .$$

II начин. За пресмятане на вероятността на събитието B можем да използваме и класическото определение за вероятност и формулата за умножаване на независими събития. Умножаваме броя на комбинациите от 4 елемента втори клас по броя на комбинациите от 4 елемента първи клас по броя на комбинациите от 24 елемента втори клас и полученото произведение разделяме на броя на комбинациите от 32 елемента пети клас:

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{24}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{4\,.\,3\,.\,4\,.\,24\,.\,23}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,1\,.\,2} \cdot \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{32\,.\,31\,.\,30\,.\,29\,.\,28} = \frac{207}{6293} =\approx 0{,}032\ .$$

$\square$

§5. ФОРМУЛА ЗА ПЪЛНАТА ВЕРОЯТНОСТ. ФОРМУЛА НА БЕЙС

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ е пълна група от несъвместими събития, т.е. $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$ и $H_i \cap H_j = \emptyset$ за $i, j = 1, 2, \dots, n$ и $i \neq j$.

Съвкупността то събитията $H_1, H_2, \dots, H_n$ ще наричаме *пълна група от несъвместими хипотези*, а всяко от тях ще наричаме *хипотеза*.

Ще предполагаме, че вероятностите $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ на хипотезите $H_1, H_2, \dots, H_n$ са известни или могат да бъдат пресметнати. Разглеждаме събитие A, за което също са известни или могат да бъдат пресметнати вероятностите на A в условията на всяка от тези хипотези, т.е. условните вероятности $P(A|H_k)$, за $k = 1, 2, \dots, n$. В сила е следната теорема.

Теорема 5.1 (Формула за пълната вероятност). *Нека събитието A може да се случи само при условията на пълна група от несъвместими хипотези $H_1, H_2, \dots, H_n$, тогава за вероятността на събитието A е в сила формулата:*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A|H_k) \ .$$

Доказателство. Разлагаме събитието A по пълната група хипотези $H_1, H_2, \dots, H_n$:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n) \ ,$$

прилагаме теоремата за събиране на несъвместими събития и получаваме

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n) \ .$$

По теоремата за умножение на вероятности

$$P(A \cap H_k) = P(H_k)\, P(A|H_k), \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

и следователно

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2) + \dots + P(H_n)\, P(A|H_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\, P(A|H_k) \ . \end{aligned}$$

С това теоремата е доказана. □

Пример 5.1. За зачот по математика са подготвени общо 100 задачи – 20 задачи за пресмятане на граници, 40 задачи за производни и 40 задачи за интеграли. Каква е вероятността студент да реши случайно избрана задача, ако той може да решава 8 от задачите за граници, 30 от задачите за производни и 10 от задачите за интеграли?

Да означим с H_1 събитието избрана е задача за граници, с H_2 – задача за производни, с H_3 – задача за интеграли и с A събитието студентът решава случайно избраната задача. За вероятностите на хипотезите H_1, H_2, H_3 имаме:

$$P(H_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2 \ , \qquad P(H_2) = \frac{40}{100} = 0{,}4 \ , \qquad P(H_3) = \frac{40}{100} = 0{,}4 \ .$$

За условните вероятности пресмятаме съответно:

$$P(A|H_1) = \frac{8}{20} = 0{,}4 \ , \quad P(A|H_2) = \frac{30}{40} = 0{,}75 \ , \quad P(A|H_3) = \frac{10}{40} = 0{,}25 \ .$$

Тогава за вероятността на събитието A намираме:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(H_k)\, P(A|H_k) = 0{,}2 \,.\, 0{,}4 + 0,4 \,.\, 0{,}75 + 0,4 \,.\, 0{,}25 = 0{,}48 \ .$$

Следователно вероятността студентът да реши случайно избрана от подготвените за зачота 100 задачи е 48%. □

Да предположим, че събитието A може да се случи само при условията на дадена ни пълна група от несъвместими хипотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Известно е, че събитието A се е осъществило. Интересува ни въпросът за намирането на *апостериорната вероятност* $P(H_k|A)$, т.е. вероятността да се е осъществила хипотезата H_k при условие, че се случило събитието A. Тази задача има практическо приложение например за откриване на причината за повреда на уред или апарат при ремонт, за намиране на причината за авария или катастрофа и др.

В сила е следната теорема:

Теорема 5.2 (Формула на Бейс). *Нека събитието A може да се случи само при условията на дадена ни пълна група от несъвместими хипотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и нека събитието A се е осъществило. Тогава*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)\, P(A|H_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)}$$

за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказателство. Фиксираме едно естествено число k измежду $1, 2, \ldots, n$. За вероятността на сечението на събитието A и хипотезата H_k имаме:

$$P(A \cup H_k) = P(A)\, P(H_k|A) = P(H_k)\, P(A|H_k) \ ,$$

откъдето

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)\,P(A|H_k)}{P(A)} \ .$$

Заместваме $P(A)$ с равното му от формулата за пълната вероятност и получаваме

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)\,P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A|H_i)} \ .$$

С това теоремата е доказана. $\square$

Да разгледаме отново Пример 5.1, но от малко по-различен аспект. Ако студентът е решил дадената задача, каква е вероятността тя да е от всеки от отделните раздели на математиката.

Пример 5.2. За зачот по математика са подготвени общо 100 задачи – 20 задачи за пресмятане на граници, 40 задачи за производни и 40 задачи за интеграли. Студент може да решава 8 от задачите за граници, 30 от задачите за производни и 10 от задачите за интеграли. На зачота студентът е решил дадената по случаен начин задача. Каква е вероятността тази задача да е за: а) граници; б) производни; в) интеграли?

Да означим с H_1 хипотезата дадената на зачота задача е за граници, с H_2 хипотезата – дадената на зачота задача е за производни, с H_3 – дадената на зачота задача е за интеграли и A е събитието студентът да реши дадената на зачота задача. Както в Пример 5.1 намираме

$$P(H_1) = 0{,}2 \ , \quad P(H_2) = 0{,}4 \ , \quad P(H_3) = 0{,}4 \ ,$$
$$P(A|H_1) = 0{,}4 \ , \quad P(A|H_2) = 0{,}75 \ , \quad P(A|H_3) = 0{,}25 \ ,$$
$$P(A) = 0{,}48 \ .$$

Сега от формулата на Бейс намираме апостериорните вероятности $P(H_1|A)$, $P(H_2|A)$ и $P(H_3|A)$:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4\,.\,0{,}75}{0{,}48} = 0{,}625 \ ,$$
$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\,P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4\,.\,0{,}25}{0{,}48} = 0{,}208 \ ,$$
$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)\,P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}2\,.\,0{,}4}{0{,}48} = 0{,}167 \ .$$

Ще отбележим, че е в сила $\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i|A) = 1$. $\square$

Пример 5.3. Десет стрелци – трима от клас 1, пет от клас 2 и двама от клас 3 – стрелят едновремено по мишена. Всеки стрелец от клас 1 улучва мишената с вероятност 0,9; всеки стрелец от клас 2 улучва мишената с вероятност 0,8; всеки стрелец от клас 3 улучва мишената с вероятност 0,6. Каква е вероятността мишената да е улучена? Ако мишената е улучена, каква е вероятността това да е направил стрелец от: а) клас 1; б) клас 2; в) клас 3?

Нека H_1 е хипотезата стреля стрелец от клас 1, H_2 – хипотезата стреля стрелец от клас 2, H_3 – хипотезата стреля стрелец от клас 3 и A е събитието мишената е улучена. По условие имаме:

$$P(H_1) = \frac{3}{10} = 0{,}3\ , \qquad P(H_2) = \frac{5}{10} = 0{,}5\ , \qquad P(H_3) = \frac{2}{10} = 0{,}2\ ,$$
$$P(A|H_1) = 0,9\ , \qquad P(A|H_2) = 0,8\ , \qquad P(A|H_3) = 0,6\ .$$

По формулата за пълната вероятност пресмятаме вероятността $P(A)$ мишената да бъде улучена от някой стрелец:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(H_k)P(A|H_k) = 0{,}3\,.\,0{,}9 + 0{,}5\,.\,0{,}8 + 0{,}2\,.\,0{,}6 = 0{,}79\ .$$

За намирането на апостериорните вероятности ще използваме формулата на Бейс.

а) Ако мишената е улучена, то вероятността това да е направил стрелец от клас 1 е:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3\,.\,0{,}9}{0{,}79} \approx 0{,}342\ .$$

б) Ако мишената е улучена, то вероятността това да е направил стрелец от клас 2 е:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\,P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}5\,.\,0{,}8}{0{,}79} \approx 0{,}506\ .$$

в) Ако мишената е улучена, то вероятността това да е направил стрелец от клас 1 е:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)\,P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}2\,.\,0{,}6}{0{,}79} \approx 0{,}152\ .$$

Ще отбележим, че отново е изпълнено $\sum_{i=1}^{3} P(H_i|A) = 1.$ □

§6. СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОН ЗА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ. РЕД ЗА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ДИСКРЕТНА СЛУЧАЙНА ВЕЛИЧИНА

Определение. *Случайна величина* ще наричаме, такава величина, която в резултат от опита приема една и само една стойност (при това предварително е неизвестна коя е тя), т.е. това е величина, която с известна вероятност приема една или друга стойност.

Съвкупността от възможните стойности на случайната величина образуват множество Θ, което ще наричаме *множество на възможните стойности* за случайната величина. Случайните величини ще означаваме с големи латински букви: $X, Y, Z, \dots$, а техните стойности ще отбелязваме с малки латински букви: $x, y, z, \dots$.

Вероятностите с които се приемат различните стойности на случайните величини ще отбелязваме с букви със съответните индекси: например $P(X = x_1) = P(x_1) = P_1$.

Примери за случайни величини са: броят на студентите на дадена лекция, броят на болните в даден район, продължителността на човешкия живот, броят на чакащите коли на определен светофар, грешката при измерването на една величина, максималната температура за деня и др.

Случайните величини могат да се разделят на дискретни и непрекъснати случайни величини.

Определение. *Дискретна случайна величина* ще наричаме, такава величина, която приема с определена вероятност отделени една от друга възможни стойности, които могат да се номерират. Броят на възможните стойности на дискретната случайна величина може да бъде краен или безкраен.

В практиката често се срещат дискретни случайни величини, които могат да приемат само цели положителни стойности. Например, броят на родените момчета в даден месец от всички родени в района, броят на присъстващите на дадена лекция студенти, броят на чакащите коли на определен светофар и др.

Да разгледаме някои примери за дискретни случайни величини.

Пример 6.1. При хвърляне на правилен зар случайна величина X е броят на падналите се точки. Множеството на възможните стойности е: $\Theta = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ,6\}$.

Пример 6.2. При трикратно хвърляне на монета случайна величина Y е честотата на появяване на герб. Множеството на възможните стойности е: $\Theta = \{0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\}$.

Определение. *Непрекъсната случайна величина* ще наричаме такава величина, която приема с определена вероятност всички стойности от някакъв интервал.

Примери за непрекъснати случайни величини са: продължителността на човешкия живот, скоростта на една молекулите на газа, температурата на въздуха през деня, времето за безаварийна работа на уред и др.

Пример 6.3. Отчитаме изправността на компютър след поредния ремонт. Случайна величина T е времето на работа до следващата повреда. Множеството на възможните стойности Θ е интервала $[0, +\infty)$. Множеството Θ е безкрайно и неизброимо.

Пример 6.4. Измерваме дължината на детайл в милиметри, като резултатът се закръгля до най близкото цяло число милиметри. Случайна величина L е грешката от закръгляването. Множеството на възможните стойности Θ е интервалът $[-1, 1]$. В този случай Θ е затворен краен интервал, но едновременно с това е безкрайно и неизброимо множество.

Закон за разпределение на случайна величина ще наричаме, всяко правило (таблица, функция), позволяващо да се определи вероятността на всевъзможните събития свързани със случайната величина (например, вероятността да приема някаква стойност или да попада в даден интервал). За дискретна случайна величина е достатъчно да могат да се определят възможните стойности на случайната величина и съответстващите им вероятности.

Ред за разпределение на дискретна случайна величина се задава с таблица от два реда:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

.

На първия ред са възможните стойности на дискретната величина, подредени в нарастващ ред, а на втория ред са вероятностите на тези стойности.

Дискретна случайна величина може да се зададе освен с ред на разпределение и чрез задаване на вероятностите с функция $f(i)$ от номера на подредените възможни стойности на случайната величина, т.е. $p_i = f(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Теорема 6.1. *Сумата от вероятностите на всички възможни стойности на случайна величина е равна на 1, т.е.* $\sum\limits_i p_i = 1$.

Доказателство. Събитията $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots, \{X = x_i\}, \ldots$ са несъвместими и образуват пълна група. Тогава $\sum\limits_i p_i = 1$. □

Пример 6.5. Разглеждаме три уреда, работещи независимо един от друг. Вероятността за безотказна работа: на първия уред е 0,2, на втория уред е 0,4 и на третия уред е 0,5. Ако случайната величина X има за стойности броя на изправно работещите уреди да се построи реда за разпределение на X.

Възможните стойности на X са 0, 1, 2, 3. Съответстващите им вероятности ще намерим чрез правилата за събиране и умножение на вероятности. За краткост ще означаваме изправността на един уред „+“ , а отказа с „$-$“. Тогава

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X=0) = P(---) = 0{,}8\,.\,0{,}6\,.\,0{,}5 = 0{,}24, \\ p_2 &= P(X=1) = P(+--) + P(-+-) + P(--+) = \\ &= 0{,}2\,.\,0{,}6\,.\,0{,}5 + 0{,}8\,.\,0{,}4\,.\,0{,}5 + 0{,}8\,.\,0{,}6\,.\,0{,}5 = 0{,}46\ , \\ p_3 &= P(X=2) = P(-++) + P(+-+) + P(++-) = \\ &= 0{,}8\,.\,0{,}4\,.\,0{,}5 + 0{,}2\,.\,0{,}6\,.\,0{,}5 + 0{,}2\,.\,0{,}4\,.\,0{,}5 = 0{,}26, \\ p_4 &= P(X=3) = P(+++) = 0{,}2\,.\,0{,}4\,.\,0{,}5 = 0{,}04\ . \end{aligned}$$

Условието $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 1$ е изпълнено.

Редът на разпределение на случайната величина има вида:

X	0	1	2	3
P	0,24	0,46	0,26	0,04

.

□

Графичното изображение на реда на разпределение се нарича *полигон на разпределение* на дискретната случайна величина X. Построяването му се извършва по следния начин: от всяка възможна стойност на X, която отбелязваме върху абсцисата, издигаме перпендикуляр, на който отбелязваме вероятността на тази стойност на X. Така по абсцисата са възможните стойности на X, а по ординатата са вероятностите на тези стойности. Получените точки съединяваме последователно с отсечки.

§7. ФУНКЦИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ. ПЛЪТНОСТ НА НЕПРЕКЪСНАТА СЛУЧАЙНА ВЕЛИЧИНА

1. Функция на разпределение на случайна величина.

Редът на разпределение и съответстващият му полигон на разпределение са присъщи само за дискретни случайни величини. Като най-обща форма на закона за разпределение, присъща за и за дискретни и за непрекъснати случайни величини, се явява функцията на разпределение.

Определение. *Функция на разпределение* $F(x)$ на случайната величина X ще наричаме вероятността за това, тя да приема стойности по-малки от зададено x:

$$F(x) = P\{X < x\} \ .$$

Геометрично, функцията на разпределение означава, каква е вероятността X да приема стойности наляво от зададената точка x върху абсцисната ос. От геометричната интерпретация за функцията на разпределение лесно се извеждат следващите свойства.

Теорема 7.1. *Ако $F(x)$ е функция на разпределение за случайната величина X, то:*

1) $F(x)$ *е ненамаляваща функция, т.е.* $F(x_1) \leq F(x_2)$ *при* $x_1 < x_2$*;*

2) $0 \leq F(x) \leq 1$*;*

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$*;*

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Доказателство. Ще докажем само 1) и 2) останалите свойства са следствие от тях.

1) За произволни $x_1 < x_2$ като използваме теоремата за събиране на вероятности имаме:

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2) = \\ = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2) \ .$$

Оттук

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$$

и следователно $F(x_2) \ge F(x_1)$, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$.

2) От свойствата на вероятността имаме, че за събитието $X < x$ е изпълнено $0 \le P(X < x) \le 1$. Тогава и $0 \le F(x) \le 1$ за всяко x.

Свойствата 3) и 4) следват от първите две. □

Следствие 7.2. *Вероятността случайната величина X да приеме стойност от интервала $[a, b)$ е равна на разликата между стойностите на функцията на разпределение в десния и левия край на интервала $[a, b)$:*

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) \ . \tag{7.1}$$

Доказателство. Доказателството следва от равенството

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \le X < x_2\} \ ,$$

при $x_2 = b$ и $x_1 = a$. □

Определение. Една случайната величина ще наричаме *непрекъсната*, ако е непрекъсната нейната функция на разпределение.

Следствие 7.3. *Вероятността една непрекъснатата случайна величина X да приема каквато и да е предварително зададена стойност, е равна на нула, т.е.* $P(X = a) = 0$.

Доказателство. Понеже случайната величина X е непрекъсната, то нейната функция на разпределение $F(x)$ е непрекъсната. Тогава с граничен преход в (7.1) при $b \to a$ получаваме

$$\lim_{b \to a} P(a \le X < b) = \lim_{b \to a} (F(b) - F(a)) = 0 \ .$$

От друга страна

$$\lim_{b \to a} P(a \le X < b) = P(X = a) \ .$$

Следователно $P(X = a) = 0$. □

Сега използвайки, че $P(X = a) = 0$ и $P(X = b) = 0$ получаваме следните равенства:

Следствие 7.4.

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) \ .$$

Следствие 7.5. *Ако множеството от възможните стойности на случайната величина X е интервала (a, b), то:*

$$F(x) = 0 \ \ \textbf{\textit{при}} \ \ x \le a \qquad \textbf{\textit{и}} \qquad F(x) = 1 \ \ \textbf{\textit{при}} \ \ x \ge b \ .$$

За функцията на разпределение $F(x)$ на дискретна случайна величина X е в сила равенството:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \ . \tag{7.2}$$

Пример 7.1. Редът на разпределение на дискретната случайна величина X е зададен с таблицата:

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Да се намери функцията на разпределение на дискретната случайна величина.

По формула (7.2) имаме:

$$F(X) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0,5 = 0,2 + 0,3 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 0,85 = 0,2 + 0,3 + 0,35 & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 0,95 = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 & \text{при } 4 < x \le 5, \\ 1 = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 + 0,05 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Графиката на тази функция на разпределение е стъпаловидна и ненамаляваща функция със скок с височина p_i в точките от абсцисата с координати x_i. $\square$

2. Плътност на непрекъснати случайни величини.

Ще наложим по-силни ограничения за непрекъснатите случайни величини. Именно, за функцията на разпределение $F(x)$ на непрекъсната случайна величина X ще искаме да е не само непрекъсната, но и диференцируема.

Определение. *Плътност на разпределение* на една непрекъсната случайната величина X ще наричаме производната $f(x)$ на нейната функция на разпределение $F(x)$, т.е.

$$f(x) = F'(x) \ .$$

Понякога функцията $f(x)$ се нарича *диференциална функция на разпределение* на случайната величина X. Кривата $y = f(x)$, изобразяваща плътността на разпределение се нарича *крива на разпределение* на случайната величина X.

Плътността на разпределение $f(x)$ е една от формите на разпределение, характерни само за непрекъснатите случайни величини. Ще отбележим,че $f(x)\,dx$ има за интервала dx ролята на вероятностите при дискретните случайни величини.

В следващите две теореми са формулирани някои основни свойства на плътността на разпределение на непрекъснатите случайни величини.

Теорема 7.6. *Плътността на разпределение $f(x)$ на непрекъсната случайна величина X е неотрицателна функция, т.е. $f(x) \geq 0$.*

Доказателство. Съгласно Теорема 7.1, 1), функцията $F(x)$ е ненамаляваща. Следователно $F'(x) \geq 0$. Тъй като $f(x) = F'(x)$, то $f(x) \geq 0$. □

Теорема 7.7. *Вероятността за това, случайната величина X да приема стойност в интервала (a, b) е равна на определения интеграл от плътността на разпределение $f(x)$ в този интервал, т.е.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ . \tag{7.3}$$

Доказателство. Нека $F(x)$ е функцията на разпределение на случайната величина X. Съгласно Следствие 7.4 имаме

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \ .$$

От друга страна по формулата на Лайбниц-Нютон:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

От тези равенства следва твърдението в теоремата. □

Следствие 7.8. *За плътността на разпределение $f(x)$ и функцията на разпределение $F(x)$ на една непрекъсната случайна величина X е в сила:*

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x) \ .$$

Доказателство. Пресмятаме несобствения интеграл и взимаме предвид свойството $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ на функцията на разпределение $F(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} F'(t)\,dt =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}(F(x)-F(a)) = F(x) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(x) \ .$$

□

Следствие 7.9. *Несобственият интеграл върху реалната права от плътността на разпределение $f(x)$ на една непрекъсната случайна величина е равен на 1, т.е.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \ . \tag{7.4}$$

Доказателство. Прилагаме Следствие 7.8 и използваме свойството $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ на функцията на разпределение $F(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \ .$$ □

Равенството (7.4) се нарича *условие за нормировка* на плътността на разпределение.

Пример 7.2. Дадена е функцията на разпределение на непрекъснатата случайна величина X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ ax^2, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{при } x \ge 1, \end{cases}$$

където a е реален параметър.

Да се намери: а) параметъра a; б) плътността на разпределение; в) вероятността случайната величина X да приема стойност между 0,25 и 0,5.

а) Щом $F(x)$ е функция на разпределение на непрекъсната случайна величина, то $F(x)$ трябва да е непрекъсната, т.е. $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = 1$. Тогава трябва $\lim\limits_{x\to 1} ax^2 = 1$. Оттук $a = 1$.

б) За плътността на разпределение имаме $f(x) = F'(x)$. Следователно

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 2x, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

в) Вероятността случайната величина X да приема стойност между 0,25 и 0,5 намираме по формула (7.3):

$$P(0{,}25 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875\ . \qquad \square$$

Пример 7.3. Дадена е плътността на разпределение на непрекъснатата случайна величина X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ ae^{-ax}, & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

където a е реален параметър.

Да се намери: а) функцията на разпределение; б) вероятността случайната величина X да приема стойност между 1 и 2.

а) При $x \leq 0$ имаме

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0\ .$$

При $x > 0$ имаме:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} ae^{-at}dt = 1 - e^{-ax}\ .$$

Тогава функцията на разпределение е:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-ax}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

б) За вероятността случайната величина X да приема стойност между 1 и 2 имаме:

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = (1 - e^{-2a}) - (1 - e^{-a}) = e^{-a} - e^{-2a}\ .$$

Например за $a = 1$ имаме $P(1 < X < 2) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,233$. $\square$

§8. ЧИСЛОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

Законът за разпределение достатъчно пълно описва една случайна величина. В много случаи той не е известен, но е достатъчно да знаем отделни числа, които характеризират най-съществените особености на разпределението. Такива са *числовите характеристики* на случайните величини. С тях ще се запознаем в настоящия параграф.

1. Математическо очакване.

Определение. *Математическо очакване* на дискретната случайна величина X се нарича сумата на произведенията на всички възможни стойности на X по вероятностите на тези стойности.

Математическото очакване на случайната величина X ще бележим обикновено с $M(X)$. Някои други използвани означения са $E(X), \mu, m_X$. Тогава

$$M(X) = \sum_k x_k p_k \ .$$

Забележка. Сумата може да е и крайна, ако дискретната случайна величина приема краен брой n стойности и тогава $k = 1, 2, \dots, n$. В случай, че случайната величина X приема безброй, но изброимо много стойности, сумата е безкрайна, като $k = 1, 2, \dots, \infty$.

Пример 8.1. Разглеждаме система от n материални точки, лежащи върху реалната права с координати $x_1, x_2, \dots, x_n$ и маси $p_1, p_2, \dots, p_n$, съответно, като $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Тази система е еквивалентна на една материална точка с маса 1 и с координата върху числовата ос $M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$.

Поради изложения горе пример често математическото очакване на една случайната величина се нарича и *център на разпределение* на тази случайна величина.

Нека извършваме поредица от опити, при които измерваме една и съща величина и получаваме различни стойности за нея в резултат на случайни грешки при измерването. Математическото очакване на получените стойности, тогава ще считаме за „истинската“ стойност на величината.

Пример 8.2. Провежда лотария с 200 негубещи билета. Печалбите са: 1 печалба от 100 лева, 5 печалби от 20 лева, 10 печалби от 5 лева и 184 печалби от 2 лева. Да се определи „справедливата“ цена на 1 билет.

Разглеждаме размерът на печалбата от един билет като случайна величина X, а вероятностите с които се приемат тези стойности определяме от условието. Редът на разпределение на печалбите на билетите е:

X	100	20	5	2
P	0,005	0,0025	0,05	0,92

.

„Справедливата“ цена на един билет от лотарията е равна на математическото очакване на дискретната случайна величина X:

$$M(X) = 100 \,.\, 0{,}005 + 20 \,.\, 0{,}0025 + 5 \,.\, 0{,}05 + 2 \,.\, 0{,}92 = 3{,}09 \ . \qquad \square$$

Определение. *Математическо очакване* на непрекъснатата случайна величина X с плътност на разпределение $f(x)$ се нарича несобственият интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \ .$$

Забележка. В случай, че непрекъснатата случайна величина приема стойности само в интервала $[a, b]$, имаме

$$M(X) = \int_{a}^{b} x f(x)\, dx \ .$$

Пример 8.3. Да се пресметне математическото очакване на непрекъснатата случайна величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textbf{при } x \le 0, \\ e^{-x}, & \textbf{при } x > 0. \end{cases}$$

За математическото очакване имаме:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\, dx = \big(x(-e^{-x})\big)\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx =$$
$$= -e^{-x}\Big|_{x=0}^{\infty} = -(e^{-\infty} - 1) = 1 \ .$$

$\square$

Основните свойства на математическото очакване на случайните величини са формулирани в следващата теорема.

Теорема 8.1. *Нека X и Y са случайни величини, а C е случайна величина, приемаща единствена стойност C. Тогава:*

1) $M(C) = C$;

2) $M(C\,.\,X) = C\,.\,M(X)$;

3) $M(X \pm C) = M(X) \pm C$;

4) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;

5) $M(X\,.\,Y) = M(X)\,.\,M(Y)$ *при независими X и Y.*

Доказателство. Ще докажем свойства 1), 2) и 3) за дискретни случайни величини като използваме, че $\sum_k p_k = 1$ и $M(X) = \sum_k x_k p_k$.

1) Случайната величина C приема една единствена стойност C и то с вероятност $p = 1$. Тогава $M(C) = C\,.\,p = C\,.\,1 = C$.

2) $M(CX) = \sum_k C x_k p_k = C \sum_k x_k p_k = C\,.\,M(X)$.

3) $M(X \pm C) = \sum_k (x_k \pm C) p_k = \sum_k x_k p_k \pm C \sum_k p_k = M(X) \pm C$.

Доказателствата за непрекъснати случайни величини са аналогични, като използваме $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ и $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$.

Ще пропуснем доказателството на останалите свойства 4) и 5). $\square$

2. Дисперсия, мода, медиана.

Мода на дискретната случайната величина X ще наричаме всяка една от стойностите на X, която се приема с най-голяма вероятност. *Мода* на непрекъсната случайната величина X ще наричаме всяка една от стойностите на X, за която плътността има най-голяма стойност. Ще бележим модата на случайна величина с Mo. Случайната величина X може да има и повече от една мода. В зависимост от броя на модите, говорим за едномодална (унимодална), двумодална (бимодална) или изобщо за полимодална случайна величина.

Медиана на случайната величина X ще наричаме точката $\bar{x}$, за която е изпълнено:

$$P(X < \bar{x}) = P(X \geq \bar{x}) = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(\bar{x}) = \frac{1}{2}\ .$$

Ще означаваме медианата на случайна величина с Me.

Стойността t_p ще наричаме p-*квантил* на случайната величина X, ако е изпълнено:

$$P(X < t_p) = p \ .$$

Да забележим, че медианата съвпада с $1/2$-квантила на случайната величина, т.е. $Me = t_{1/2}$. Медианата не винаги се определя еднозначно и затова се използва предимно при непрекъснати случайни величини.

Пример 8.4. Да се пресметне математическото очакване, модата и медианата за дискретната случайна величина X, зададена с таблицата:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,3	0,25	0,15	0,10

.

За математическото очакване имаме:

$$M(X) = 0\,.\,0{,}2 + 1\,.\,0{,}3 + 2\,.\,0{,}25 + 3\,.\,0{,}15 + 4\,.\,0{,}10 = 1{,}65 \ .$$

Модата Mo е стойността на X, която се приема с най-голяма вероятност, като от таблицата се вижда, че $Mo = 1$.

Медианата Me е такава стойност на X, за която $F(Me) = 0{,}5$. В случая имаме:

$$F(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5 \ ,$$

следователно $Me = 2$. Тук обаче, за всяко $x^* \in (1, 2]$ е изпълнено условието $F(x^*) = 0{,}5$, така че медиана е всяка стойност $x^* \in (1, 2]$. □

Пример 8.5. Да се пресметне модата и медианата за дискретната случайна величина X, зададена с таблицата:

X	1	2	3	4	5	6
P	0,10	0,25	0,20	0,15	0,25	0,05

.

От таблицата се вижда, че има две стойности на X, които се приемат с най-голяма вероятност 0,25: $X = 2$ и $X = 5$. Следователно разглежданата случайна величина е бимодална с моди $Mo_1 = 2$ и $Mo_2 = 5$.

За намирането на медианата имаме:

$$\begin{aligned} &F(3) = P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}10 + 0{,}25 = 0{,}35 < 0{,}5 \ , \\ &F(4) = P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \\ &\qquad = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}55 > 0{,}5 \ . \end{aligned}$$

В този пример случайната величина няма медиана, но въпреки това за медиана се приема:

1) или средата на интервала $[3,4]$, т.е. $Me_1 = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$,

2) или се прави линейна интерполация на данните

X	**3**	**4**
$F(x)$	**0,35**	**0,55**

.

Намираме правата $y = \dfrac{0{,}55 - 0{,}35}{4-3}(x-3) + 0{,}35$, минаваща през точките с координати (3; 0,35) и (4; 0,55). За медиана се приема абсцисата на точката от правата, имаща ордината 0,5. Полагаме $y = 0{,}5$ в уравнението на правата и намираме $x = 3 + \dfrac{0{,}15}{0{,}20} = 3{,}75$, т.е. $Me_2 = 3{,}75$. □

Пример 8.6. Да се определи коефициента a, математическото очакване, модата и медианата на непрекъснатата случайна величина X, разпределена по „закона на правоъгълния триъгълник“ с плътност:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{при } x \le 0 \text{ и } 2 \le x. \end{cases}$$

Коефициентът a намираме от условието, че лицето на триъгълника трябва да е равно на единица: $S_\triangle = \dfrac{2\,.\,2a}{2} = 1$ и оттук $a = \dfrac{1}{2}$.

Математическото очакване $M(X)$ намираме от механичната интерпретация: то е абсцисата на центъра на тежестта за триъгълника, т.е.

$$M(X) = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \approx 1,333\ .$$

Модата очевидно е абсцисата на точката, в която функцията $f(x)$ достига най-голяма стойност, т.е. $Mo = 2$.

Медианата е абсцисата на точката x_m, където лицето се дели наполовина от правата минаваща през тази точка и перпендикулярна на абсцисата. От уравнението

$$\frac{x_m}{2}\, x_m . \frac{1}{2} = \frac{x_m^2}{4} = \frac{1}{2}\ ,$$

откъдето намираме $x_m = Me = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. □

Да означим с μ математическото очакване на случайната величина X. Разглеждаме разликата между случайната величина X и μ. Получаваме нова случайна величина, която бележим с $X - \mu$. Случайната величина $X - \mu$ ще наричаме *центрирана случайна величина* или *отклонение*. От Теорема 8.1, 3), при $C = \mu$ следва, че математическото очакване на отклонението е нула, т.е.

$$M(X - \mu) = 0 \ .$$

Определение. *Дисперсия* $D(X)$ на случайната величина X ще наричаме математическото очакване на квадрата на отклонението, т.е.

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = M((X - \mu)^2) \ .$$

От свойствата на математическото очакване може да се изведе една формула с практическо приложение за пресмятане на дисперсията.

Следствие 8.2. *За дисперсията $D(X)$ на случайната величина X е в сила*

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = M(X^2) - \mu^2 \ .$$

Ето някои свойства на дисперсията на една случайна величина.

Теорема 8.3. *Нека X и Y са случайни величини, а C е случайна величина, приемаща единствена стойност C. Тогава:*

1) $D(C) = 0$;

2) $D(C\,X) = C^2 \,.\, D(X)$;

3) $D(X \pm C) = D(X)$;

4) $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$.

Доказателство. Използваме свойствата на математическото очакване.

1) От $\mu = M(C) = C$ следва $D(C) = M((C - C)^2) = M(0) = 0$.

2) Имаме

$$\begin{aligned} D(C\,X) &= M((C\,X - M(C\,X))^2) = M((C\,X - C\,M(X))^2) = \\ &= M(C^2(X - M(X))^2) = C^2\,M((X - M(X))^2) = C^2\,D(X) \ . \end{aligned}$$

4) За $D(X + Y)$ последователно получаваме

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M((X + Y)^2) - (M(X + Y))^2 = \\ &= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = \\ &= M(X^2) + M(Y^2) - (M(X))^2 - (M(Y))^2 = \\ &= (M(X^2) - (M(X))^2) + (M(Y^2) - (M(Y))^2) = D(X) + D(Y) \ . \end{aligned}$$

Съвсем по същия начин $D(X - Y) = D(X) - D(Y)$.

Свойство 3) следва от свойство 4) и свойство 1). $\square$

Пример 8.7. Да се пресметне дисперсията на непрекъснатата случайна величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ e^{-x}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

В Пример 8.3 намерихме математическото очакване $M(X) = 1$ на тази случайна величина. За дисперсията имаме:

$$\begin{aligned} D(X) = M(X^2) - 1^2 &= \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx - 1 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx - 1 = \\ &= \big(x^2(-e^{-x})\big)\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty e^{-x}\,dx^2 - 1 = \int_0^\infty e^{-x} 2x\,dx - 1 = \\ &= \int_0^\infty 2x\,d(-e^{-x}) - 1 = \big(2x(-e^{-x})\big)\Big|_{x=0}^{\infty} + 2\int_0^\infty e^{-x} dx - 1 = \\ &= 2(-e^{-x})\Big|_{x=0}^{\infty} - 1 = 2(-e^{-\infty} + 1) - 1 = 2 - 1 = 1\ . \end{aligned}$$

Така за разглежданата случайна величина и $M(X) = 1$ и $D(X) = 1$. $\square$

Ще отбележим, че размерността на дисперсията на случайната величина X е равна на размерността на случайната величина X, повдигната на квадрат. По тази причина е необходимо да въведем такава числова характеристика за отклонението, която да има размерността на случайната величина X. Такава числова характеристика е средното квадратично отклонение.

3. Средно-квадратично отклонение.

Определение. *Средно-квадратично отклонение* $\sigma(X)$ на случайната величина X ще наричаме корен квадратен от нейната дисперсия:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\ .$$

Пример 8.8. Ако случайната величина X е зададена с реда на разпределение:

X	1	2	4
P	0,2	0,4	0,4

,

да се пресметнат математическото очакване, дисперсията и средно-квадратичното отклонение на случайните величини: а) X; б) $Y = 2X + 3$; в) $Z = 3X - 4$.

а) Ще пресметнем първо числовите характеристики на случайната величина X. Имаме:

$$\mu = M(X) = 1 \,.\, 0{,}2 + 2 \,.\, 0{,}4 + 4 \,.\, 0{,}4 = 2{,}6 \ .$$

Тогава редът на разпределение на квадрата на центрираната случайна величина $(X - \mu)^2$ е:

$(X-\mu)^2$	**2,56**	**0,36**	**1,96**
P	**0,2**	**0,4**	**0,4**

.

Дисперсията $D(X)$ можем да пресметнем по два начина. От определението:

$$D(X) = M((X-\mu)^2) = 2{,}56 \,.\, 0{,}2 + 0{,}36 \,.\, 0{,}4 + 1{,}96 \,.\, 0{,}4 = 1{,}44 \ .$$

или по формулата от Следствие 8.2:

$$D(X) = M(X^2) - \mu^2 = (1 \,.\, 0{,}2 + 4 \,.\, 0{,}4 + 16 \,.\, 0{,}4) - 2{,}6^2 = 8{,}2 - 6{,}76 = 1{,}44 \ .$$

Тогава средно-квадратичното отклонение на случайната величина X е $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$.

б) За пресмятането на числовите характеристики на случайната величина $Y = 2X + 3$ използваме свойствата на математическото очакване и на дисперсията:

$$\begin{aligned} M(Y) &= M(2X) + M(3) = 2M(X) + 3 = 2 \,.\, 2{,}6 + 3 = 8{,}2 \ , \\ D(Y) &= D(2X) + D(3) = 2^2 D(X) + 0 = 4 \,.\, 1{,}44 = 5{,}76 \ , \\ \sigma(Y) &= \sqrt{D(Y)} = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4 \ . \end{aligned}$$

в) За случайната величина $Z = 3X - 4$ аналогично намираме

$$\begin{aligned} M(Z) &= M(3X) - M(4) = 3M(X) - 4 = 3 \,.\, 2{,}6 - 4 = 3{,}8 \ , \\ D(Z) &= D(3X) - D(4) = 3^2 D(X) + 0 = 9 \,.\, 1{,}44 = 12{,}96 \ , \\ \sigma(Z) &= \sqrt{D(Z)} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6 \ . \end{aligned}$$

4. Ковариация. Коефициент на корелация.

Тук ще дефинираме две величини, намиращи приложение при изследване на зависимости между две случайни величини.

Определение. ***Ковариация*** $Cov(X,Y) = K_{X,Y}$ на случайните величини X и Y ще наричаме:

$$Cov(X,Y) = K_{X,Y} = M\big((X - M(X))(Y - M(Y))\big) \ .$$

Следствие 8.4. *В сила са следните свойства на ковариацията:*

1) $K_{X,Y} = K_{Y,X}$;

2) $K_{X,Y} = M(XY) - M(X)M(Y)$.

Определение. ***Коефициент на корелация*** $R_{X,Y}$ на случайните величини X и Y ще наричаме:

$$R_{X,Y} = \frac{K_{X,Y}}{D(X)D(Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{D(X)D(Y)} \ .$$

Коефициентът на корелация $R_{X,Y}$ показва степента на зависимост между случайните величини X и Y. В сила е неравенството:

$$-1 \leq R_{X,Y} \leq 1 \ .$$

Ако $R_{X,Y} > 0$, то величините X и Y са правилно корелирани. При $R_{X,Y} < 0$ величините X и Y са обратно корелирани. В случай, че $R_{X,Y} = 0$, то величините са некорелирани. Ако случайните величини X и Y са независими, то те са некорелирани; обратното не винаги е вярно.

5. Моменти. Асиметрия и ексцес.

Определение. k***-ти начален момент*** $m_k(X)$ на случайната величина X ще наричаме математическото очакване на случайната величина X^k:

$$m_k(X) = M(X^k) \ .$$

Определение. k***-ти централен момент*** $\mu_k(X)$ на случайната величина X ще наричаме математическото очакване на k-тата степен на центрираната случайна величина, т.е. на $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k(X) = M((X - M(X))^k) \ .$$

Забележка. k-тия централен момент $\mu_k(X)$ има размерността на случайната величина X, повдигната на степен k.

Ще отбележим, че при симетрично разпределение на стойностите на случайната величина X относно математическото очакване $M(X) = \mu$, нечетните моменти $\mu_1, \mu_3, \dots$ са равни на нула.

Определение. *Коефициент на асиметрия* (или просто *асиметрия*) $As(X)$ на случайната величина X ще наричаме величината:

$$As(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \ .$$

При положителни стойности на $As(X)$, стойностите на X са изместени в дясно от математическото очакване $M(X)$, а при отрицателни стойности на $As(X)$, те са изместени в ляво от математическото очакване $M(X)$.

Друга важна особеност за случайната величина X е издутостта (заостреността) или заоблеността на графиката на плътността на случайната величина X.

Определение. *Коефициент на ексцес* (*ексцес*) $Ek(X)$ на случайната величина X ще наричаме величината:

$$Ek(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

При положителни стойности на $Ek(X)$, графиката на плътността на случайната величина X е по-издута (заострена), а при отрицателни стойности е по-заоблена от графиката на плътността за стандартното нормално разпределение.

Величините $As(X)$ и $Ek(X)$ са безразмерни величини.

§9. НЯКОИ ОСНОВНИ ДИСКРЕТНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Равномерно дискретно разпределение.

Случайната величина X има *равномерно дискретно разпределение*, ако n на брой стойности $x_1, x_2, \dots, x_n$ с равна вероятност $\frac{1}{n}$, т.е.

$$P(X = x_k) = p_k = \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, \dots, n \ .$$

Математическото очакване на X съвпада със средното аритметично на стойностите на тази случайната величина:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ .$$

2. Биномно разпределение.

Разглеждаме случайна величина X, приемаща стойности равни на броя на опитите, в които се случва събитието A в серия от n повтарящи се независими опита. Така X приема стойности $x_k = k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Нека вероятността да се случи A при всеки опит е еднаква $P(A) = p$ и $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Тогава вероятностите на стойностите на X се определят по формулата на Бернули:

$$P(X = x_k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ . \qquad \textbf{(9.1)}$$

Описаната схема от опити се нарича *схема на Бернули.*

Една случайна величина има *биномно разпределение* $Bi(n, p)$, ако стойностите и вероятностите, с които се приемат тези стойности са

$$x_k = k \ , \ \ p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n \ ,$$

където $0 \leq p \leq 1$ и $q = 1 - p$.

Ще докажем, че числовите характеристики на случайна величина с биномно разпределение $Bi(n, p)$ имаме:

$$M(X) = np \ , \qquad D(X) = npq \ , \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq} \ .$$

Нека случайната величина X_i има стойности – броят на случването на събитието A в i-тия опит. Тя има следния ред на разпределение:

X_i	0	1
p_i	q	p

и следователно $M(x_i) = 0 \, . \, q + 1 \, . \, p = p$. Тогава от $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ получаваме

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n) = np \ .$$

Случайната величина X_i^2 има ред на разпределение, зададен чрез таблицата:

X_i^2	0^2	1^2
p_i	q	p

,

а също така математическо очакване $M(X_i^2) = 0\,.\,q + 1\,.\,p = p$ и дисперсия $D(X_i) = M(X_i^2) - (M(X_i))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$. Понеже случайните величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими, то:

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = npq \ .$$

За средно-квадратичното отклонение имаме: $\sigma = \sqrt{npq}$.

Биномното разпределение има широко приложение във вероятностите, статистиката и практиката. Други дискретни разпределения са негово следствие или обобщение. То се използва и при Граничните теореми за вероятностите и за наблюдаваните събития и явления.

3. Геометрично разпределение.

При условията на схемата на Бернули, се интересуваме от броя на неблагоприятните за събитието A опити, до провеждането на първия благоприятен опит. Именно, разглеждаме серия от повтарящи се независими опити, като вероятността да се случи A при всеки опит е еднаква $P(A) = p$ и $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Тогава вероятността събитието A да се сбъдне за пръв път при $(k+1)$-ия опит е равна на $p_k = pq^k$.

Една случайната величина X има *геометрично разпределение* $Ge(p)$, ако нейните стойности и вероятностите, с които се приемат тези стойности са

$$x_k = k \ , \quad p_k = pq^k \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \ ,$$

където $0 \leq p \leq 1$ и $q = 1 - p$.

За числовите характеристики на случайна величина с геометрично разпределение $Ge(p)$ имаме:

$$M(X) = \frac{q}{p} \ , \qquad D(X) = \frac{q}{p^2} \ , \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p} \ .$$

Ще докажем само равенството за математическото очакване. Получаваме:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^k = pq \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} \ .$$

Тъй като $0 \leq p \leq 1$ и $p + q = 1$, то последната сума е производна по q на сума на намаляваща геометрична прогресия и от нейните свойства имаме:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = (1-q)^{-1} = g(q), \quad g'(q) = (1-q)^{-2} = p^{-2} = \frac{1}{p^2} \ .$$

Така окончателно получаваме:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq.g'(q) = pqp^{-2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p} \ .$$

4. Хипергеометрично разпределение.

Нека в съвкупност от общо N предмета, M от тях притежават определено качество A. Ако избираме по случаен начин n предмета, каква е вероятността m от тях да са с качеството A? Условията $M < N$ и $0 \leq m \leq \min\{n, M\}$ са естествени.

Една случайната величина X има *хипергеометрично разпределение* $H(n, m, M)$, ако нейните възможни стойности са $m = 0, 1, \ldots, \min\{n, M\}$, а съответстващите им вероятности се изразяват с формулата:

$$P(X = m) = p_m = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_M^m \, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \ .$$

За случайна величина X с хипергеометрично разпределение $H(n, m, M)$ имаме:

$$M(X) = \frac{nM}{N} \ , \qquad D(X) = \frac{nM(N-M)}{N^2} + n(n-1)\Big[\frac{M(M-1)}{N(N-1)} - \frac{M^2}{N^2}\Big] \ .$$

Хипергеометричното разпределение намира широко приложение за оценяване качеството на продукцията, както и при редица случаи, когато предметите в дадена съвкупност могат да се разделят на две групи според някакъв признак.

5. Поасоново разпределение.

Случайната величина X има *Поасоново разпределение* $Po(a)$, ако нейните възможни стойности са $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ (те са безкраен, но изброим брой), а съответстващите им вероятности се изразяват с формулата:

$$P(X = n) = p_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a} \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

където $a > 0$ е параметър.

Поради $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ условието $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ е изпълнено.

За числовите характеристики на случайна величина с Поасоново разпределение $Po(a)$ имаме:

$$M(X) = a \ , \qquad D(X) = a \ , \qquad \sigma(X) = \sqrt{a} \ .$$

Поасоновото разпределение може да се разглежда като граничен случай на биномното разпределение при $n \to \infty$ и $p \to 0$. По-точно, при

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} np = a$$

можем да смятаме, че

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} Bi(n,p) = Po(a) \ .$$

Поасоновото разпределение има широко приложение в редица практически задачи, при разглеждане прости случайни потоци и др.

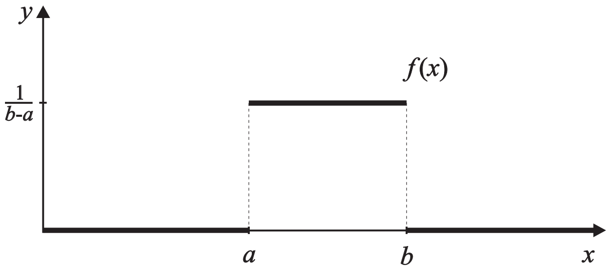
Ясно е, че Поасоновото разпределение се използва при изследване на опити със събития, за които вероятността p е много малка. Например при разредени разтвори, като измерител за броя на позвъняванията за единица време, за броя на пристигащите коли на дадено кръстовище или купувачи на опашка и др.

§10. НЯКОИ ОСНОВНИ НЕПРЕКЪСНАТИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Равномерно разпределение.

Една непрекъсната случайната величина X е *равномерно разпределена* $U[a,b]$ в интервала $[a,b]$, ако плътността ѝ $f(x)$ е постоянна в този интервал и нула извън него. От свойството на плътността $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ намираме константната стойност на $f(x)$ в $[a,b]$. Тогава

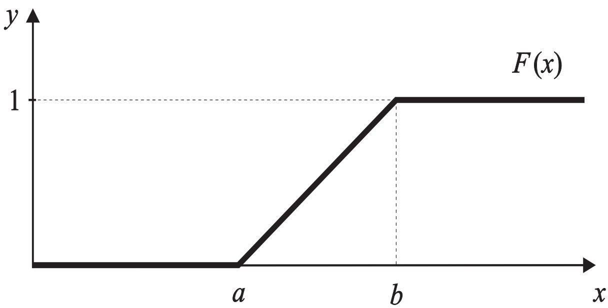
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } 0 \le x \le b, \\ 0, & \text{при } x > b. \end{cases}$$



Фигура 10.1

От непрекъснатостта на функцията на разпределение $F(x)$ на случайната величина X с равномерно разпределение $U[a,b]$ и от свойството $F'(x) = f(x)$ намираме

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } 0 \le x \le b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases}$$



Фигура 10.2

Лесно се пресмятат числовите характеристики на случайната величина X с равномерно разпределение $U[a,b]$:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}\ , \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}\ , \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\ .$$

Ще отбележим още едно свойство. Вероятността, случайната величина X с равномерно разпределение $U[a,b]$ да приема стойности в интервала (x_1, x_2) е:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a} \ .$$

2. Експоненциално (показателно) разпределение.

Случайната величина X има *експоненциално (показателно) разпределение* $Exp(a)$, където $a > 0$ е параметър, ако нейната плътност на разпределение е:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ ae^{-ax}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

От непрекъснатостта на функцията на разпределение $F(x)$ на случайната величина X с експоненциално разпределение $Exp(a)$ и от свойството $F'(x) = f(x)$ намираме

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-ax}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

За числовите характеристики на случайната величина X с експоненциално разпределение $Exp(a)$ имаме

$$M(X) = \frac{1}{a} \ , \qquad D(X) = \frac{1}{a^2} \ , \qquad \sigma(X) = \frac{1}{a} \ .$$

3. Нормално (Гаусово) разпределение.

Случайната величина X е с *нормално (Гаусово) разпределение* $N(a, b)$, където a и $b > 0$ са параметри, ако има плътност на разпределението:

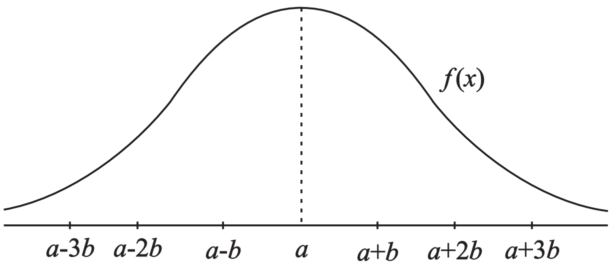
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b}\, e^{-(x-a)^2/(2b^2)} \ .$$

Графиката на плътността на нормалното разпределение има симетричен и камбановиден вид. Максималната й стойност се достига в точката $x = a$ и $f_{max} = f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b}$.

Използвайки интеграла на Поасон

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Графика на нормалната крива



Фигура 10.3

лесно се пресмятат математическото очакване и дисперсията на случайната величина X с нормално разпределение $N(a,b)$:

$$M(X) = a \ , \qquad D(X) = b^2 \ , \qquad \sigma(X) = b \ .$$

В частност, за случайната величина X с нормално разпределение $N(0,1)$ се казва, че има *стандартно* нормално разпределение. В този случай: $M(X) = 0$, $D(X) = 1$ и $\sigma(X) = 1$.

Да отбележим, че ако случайната величина X е с нормално разпределение $N(a,b)$ и положим $Y = \dfrac{X-a}{b}$, то случайната величина Y е със стандартно нормално разпределение $N(0,1)$.

Ще дадем едно представяне на функцията на разпределение $\bar{F}(x)$ на случайната величина Y със стандартно нормално чрез *функцията на Лаплас*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt \ .$$

За функцията на Лаплас имаме:

$$\Phi(0) = 0 \ , \quad \Phi(-x) = -\Phi(x) \ , \quad \lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = -0{,}5 \ , \quad \lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0{,}5 \ .$$

Връзката между функцията $\bar{F}(x)$ и функцията на Лаплас се дава със следващата теорема.

Теорема 10.1. *За функцията на разпределение $\bar{F}(x)$ на случайната величина Y със стандартно нормално разпределение $N(0,1)$ са в сила:*

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x) \ ,$$

$$P(\alpha < Y < \beta) = \bar{F}(\beta) - \bar{F}(\alpha) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \ .$$

Следствие 10.2. *За функцията на разпределение $F(x)$ на случайната величина X с нормално разпределение $N(a,b)$ са в сила:*

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-a}{b}) \ ,$$
$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{b}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{b}) \ . \qquad (10.1)$$

Следствие 10.3. *За случайната величина X с нормално разпределение $N(a,b)$ е в сила равенството:*

$$P(a - \ell\, b < X < a + \ell\, b) = P(|X - a| < \ell\, b) = 2\Phi(\ell) \ . \qquad (10.2)$$

Нормалното разпределение е най-често използваното разпределение. То е в основата на централната гранична теорема и има широко приложение в статистиката. Обикновено то се използва с помощта на таблици за стойностите на функцията на Лаплас $\Phi(x)$ или функцията на разпределение $\bar{F}(x)$ и се прилага някоя от формулите (10.1) или (10.2).

Приведеният по-долу пример е с различни стойности на ℓ, които са по-често използвани в статистиката.

Пример 10.1. Да пресметнем вероятностите случайната величина X с нормално разпределение $N(a,b)$ да се намира в някои симетрични на математическото очакване $M(X) = a$ интервали, с дължина пропорционална на средно-квадратичното отклонение $\sigma(X) = b$:

$$P(a - b < X < a + b) = P(|X - a| < b) \approx 0{,}683 \ ,$$
$$P(a - 2b < X < a + 2b) = P(|X - a| < 2b) \approx 0{,}955 \ ,$$
$$P(a - 3b < X < a + 3b) = P(|X - a| < b) \approx 0{,}997 \ ,$$
$$P(a - 1{,}645\, b < X < a + 1{,}645\, b) = P(|X - a| < 1{,}645\, b) \approx 0{,}90 \ ,$$
$$P(a - 1{,}96\, b < X < a + 1{,}96\, b) = P(|X - a| < 1{,}96\, b) \approx 0{,}95 \ ,$$
$$P(a - 2{,}58\, b < X < a + 2{,}58\, b) = P(|X - a| < 2{,}58\, b) \approx 0{,}99 \ .$$

Геометрично резултатите от примера показват каква част от площта на неограничената фигура между графиката на плътността $f(x)$ и абсцисната ос, се намира в ивицата $\{(x,y) : a - \ell\, b \le x \le a + \ell\, b\}$. $\square$

§11. ДРУГИ ЧЕСТО ИЗПОЛЗВАНИ В СТАТИСТИКАТА РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

1. χ^2 разпределение.

Нека са дадени n на брой случайни величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с нормално разпределение $N(\mu, \sigma)$. Сумата X на стандартизираните им величини $\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

се нарича *случайна величина* χ^2 *(хи-квадрат) с* n *степени на свобода*, а разпределението на тази случайна величина е известно като χ^2-*разпределение.* Отбелязваме го с $\chi^2(n)$.

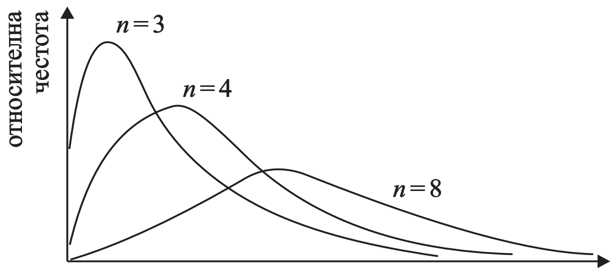
Плътността на разпределение на случайната величина X с χ^2-разпределение с n степени на свобода има вида:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{e^{-x/2}\, x^{(n-2)/2}}{2^{n/2}\, \Gamma(\frac{n}{2})}, & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

а за математическото очакване, дисперсията и средно-квадратичното отклонение имаме:

$$M(X) = n\ , \qquad D(X) = 2n\ , \qquad \sigma(X) = \sqrt{2n}\ .$$

Модата на случайната величина X е в точката $Mo = n - 2$. С нарастването на n, χ^2-разпределението клони към нормалното разпределение $N(n, \sqrt{2n})$.



Фигура 11.1

Голяма е ролята на χ^2-разпределението в статистиката. То намира приложение в статистическите изводи: при изследване съвпадение на емпирични с теоретични разпределения, при проверка на статистически хипотези за връзка между параметри. За практически цели се използват таблици с теоретичните стойности на χ^2-разпределението при определени степени на свобода и съответни вероятности.

2. t-разпределение на Стюдънт-Фишер.

Ще дадем най-напред статистическото определение. Нека X е случайна величина с нормално разпределение $N(\mu, \sigma)$, където математическото очакване μ и средно-квадратичното отклонение σ са предварително неизвестни. Правим независими случайни извадки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с обем n от генералната съвкупност от стойностите на X и означаваме с T случайната величина приемаща стойности

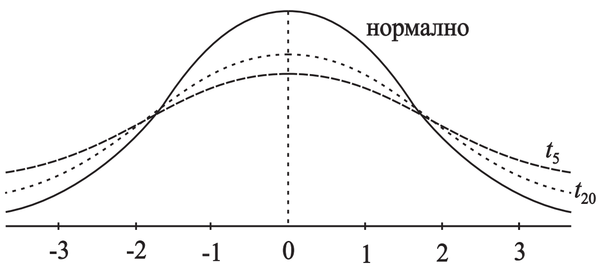
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \ ,$$

където

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \ .$$

Разпределението на така дефинираната случайна величина T се нарича *t-разпределение* (*разпределение на Стюдънт-Фишер*) *с $\ell = n-1$ степени на свобода*. Бележи се с $t(n-1) = t(\ell)$.

t-разпределение с различни степени на свобода (5 и 20)



Фигура 11.2

Използвайки дефинираните вече разпределения можем по друг начин да дефинираме t-разпределението. А именно, разпределението на случайната величина T се нарича *t-разпределение* (*разпределение на Стюдънт-Фишер*) *с* n *степени на свобода* $t(n)$, ако

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y^2/n}} \ ,$$

където X и Y са независими случайни величини, такива че $X \in N(0,1)$ и $Y \in \chi^2(n)$.

Това разпределение има по-голямо приложение в случаите, когато $n \leq 30$; при $n > 30$ то практически съвпада с нормалното разпределение. Това е илюстрирано на фиг. 11.2

Плътността $\phi(x)$ на случайната величина T с t-разпределение се задава с формулата:

$$\phi(x) = \frac{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi\ell}\left(\frac{\ell}{2}\right)!\left(1+\frac{x^2}{\ell}\right)^{(\ell+1)/2}} \ .$$

За случайната величина T, която има t-разпределение и $\ell = n-1$ степени на свобода имаме:

$$M(X) = 0 \ , \qquad D(X) = \frac{n}{n-2} \ , \qquad \sigma(X) = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \ .$$

Широко приложение t-разпределението намира при статистическа проверка на хипотези: за разлика между средни величини, за значимост на корелационни и регресионни коефициенти при различни модели и при оценяване на параметри на генералната съвкупност от репрезентативни извадки и др. В практиката се работи с готови таблици.

3. F-разпределение на Фишер.

Нека X_1 и X_2 са две случайни величини, като X_1 е с χ^2-разпределение с n_1 степени на свобода, а X_2 е с χ^2-разпределение с n_2 степени на свобода. Случайната величина Y има *F-разпределение* (*разпределение на Фишер*) *с* n_1 *и* n_2 *степени на свобода* $F(n_1, n_2)$, ако:

$$Y = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \ .$$

За плътността $f(x)$ на случайната величина Y, която има F_{n_1,n_2}-разпределение е в сила:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} \dfrac{x^{n_1/2-1}}{\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{(n_1+n_2)/2}}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Теорема 11.1. *За случайната величина Y, която има F-разпределение $F(n_1, n_2)$ са в сила свойствата:*

1) $M(X) = \dfrac{n_2}{n_2 - 2}$ *при* $n_2 > 2$*;*

2) F*-разпределението е едномодално и има медиана* $Me \leq 1$*;*

3) F*-разпределението е асиметрично и случайната величина* Y *приема само неотрицателни стойности;*

4) F*-разпределението зависи и от двата параметъра* n_1, n_2*. Ако едновременно* $n_1, n_2 \to \infty$*, то* F*-разпределението клони към нормалното разпределение. Ако само* $n_2 \to \infty$*, то* F*-разпределението клони към* χ^2 *разпределение с* n_1 *степени на свобода.*

F-разпределението е в основата на дисперсионния анализ при проверка на хипотези за разлика на две дисперсии, породена от различни факторни и случайни влияния. Освен това се използва и за оценка на значимостта на коефициента на множествена корелация. За практическа работа с F-разпределението са разработени таблици при различни степени на свобода.